高等学校教材

高等几何

周建伟　编著

高等教育出版社


ISBN 7-04-011878-5

定价 13.70 元

高等学校教材

高等几何

周建伟　编著

高等教育出版社

内容简介

本书以变换群的观点为指导思想，以一些重要定理为主线，介绍了平面射影几何的基本知识，努力展示射影、仿射、欧氏、双曲、椭圆等多种几何的丰富内容和内在联系。内容包括：射影平面、射影映射、二次曲线的射影理论、仿射几何与欧氏几何、平面双曲几何、平面椭圆几何等。

本书可供高等师范院校数学系作为教材，也可用作自学。

图书在版编目(CIP)数据

高等几何/周建伟编著.—北京：高等教育出版社，2003.6

ISBN 7-04-011878-5

Ⅰ.高… Ⅱ.周… Ⅲ.高等几何-高等学校-教材 Ⅳ.018

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 013757 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　销　新华书店北京发行所
排　版　高等教育出版社照排中心
印　刷　北京市朝阳区北苑印刷厂

开　本	850×1168　1/32	版　次	2003年6月第1版
印　张	9.75	印　次	2003年6月第1次印刷
字　数	240 000	定　价	13.70元

序

数学专业有三门传统的基础课程——“三高”,即高等微积分,高等代数和高等几何,因此,高等几何自然地是高等师范院校数学专业的三门基础课程之一.但是随着时代的推移,前两门课程的面貌有了很大的变化,高等微积分发展成今天的数学分析,无论从内容的深度上和思想方法上与传统的高等微积分有了很大的变化;高等代数也是一样,有关群、环、域的概念和线性代数的内容都是传统的高等代数课程内容中所没有的.但是遗憾的是高等几何的内容多少年来没有突破性的改变,似乎有些与历史的进步脱节.我一直指望有一本内容新颖的高等几何教材,使它到了21世纪还能够在奠定数学专业基础上充分发挥作用.我阅读了周建伟教授的《高等几何》教材,尽管传统的内容还是教材的主要部分,但是有了新意,教材的最后部分讲述了二维双曲几何和椭圆几何的基本内容,使学生学习了这些内容以后,能够突破传统的欧几里得几何的框架,去想象和思索新的几何领域.我希望这本《高等几何》教材能受到广大高等师范院校数学专业的师生的欢迎.

梅向明

2000年4月25日于首都师范大学

前　言

几何是研究空间形式的重要数学分支,而高等几何是研究射影、欧氏、双曲、椭圆等几何及它们的相互关系的学科.本书以Klein的变换群观点为指导思想,以一些重要定理为主线,介绍了平面射影几何的基本知识,努力展示射影、仿射、欧氏、双曲、椭圆等多种几何的丰富内容和内在联系.本书可供高等师范学院数学系作为教材,也可用作自学.

本书在教学内容的选取和编排上作了一些努力,对一些命题给出新的、简洁的证明,力求做到叙述正确、条理分明.通过双曲与椭圆几何的学习可以对古典几何有一个全面的了解,也能接触一些近代数学思想(如覆盖空间、Gauss - Bonnet 公式等),这对提高学生学习兴趣、培养数学修养及对今后的学习都有好处.

本书采用综合法与解析法并重的写法,主要概念的定义与讨论尽可能采用几何方法进行,以帮助读者建立空间直观,能很好地理解这些概念.写作时也注意解题技巧以及利用作图帮助解题,以增强能力的培养.书中选编了较多的例题和习题,其中一部分与中学平面几何有关,以突出射影几何对中学几何的指导作用.这些习题也是本书的重要组成部分,它们对于巩固与加深对内容的理解是很有必要的.

阅读本书应该具有解析几何及线性代数方面的知识,如果学过一些群论那更好,第五章在介绍双曲弧长与面积时要用到一些简单的微积分.

苏州大学数学科学学院对本书的编写与试用给予了大力的支持.梅向明教授审阅了教材并提出了很好的修改意见.本书曾由苏

州大学出版社出版，管兆宁编辑做了许多工作.在此，特向他们表示衷心感谢.作者也十分感谢高教社李陶同志与张爱和同志，李陶同志为本书的出版做了很多前期工作，张爱和同志仔细地审阅了书稿，提出了许多改进意见.

作者相信，这本书的出版对于高等几何的教学改革与建设是有益的.

限于本人的水平和经验，书中不当之处在所难免，恳请读者指正.

周建伟

2003 年 2 月于苏州

郑重声明

责任编辑　张爱和

封面设计　于　涛

责任绘图　宗小梅

版式设计　王艳红

责任校对　夏　晔

责任印制　杨　明

目　录

第一章 射影平面

本书研究实射影几何及其相关的几何.射影平面有几种等价的定义方法,这里采用在普通欧氏平面上添加无穷远点以及无穷远直线,将平面扩充为拓广平面,以拓广平面为模型来定义射影平面.采用这种定义的好处是较为直观,并且这一构造直接给出了将射影几何结论运用于欧氏几何的方法.在§1.1,我们讨论拓广平面上点与直线的齐次坐标表示,利用这一表示可以得到射影平面上点与直线的解析表示.这种解析表示也可用来定义射影平面.本章还将介绍射影平面的一些基本但重要的概念,如射影坐标,对偶原理,交比等.

§1.1 拓广欧氏平面

我们以 ξ,η 等希腊字母表示直线,用大写英文字母 A,B,C 等表示点.如果 A,B 是不同的两点,用 AB 表示过 A,B 的直线.两直线 ξ 与 η 的交点用 $\xi\times\eta$ 表示,$P\in\xi$ 表示点 P 在直线 ξ 上.在这一节我们通过改造欧氏平面,得到射影平面的一个模型.

1.1.1 中心射影

先讨论两条共面直线之间的中心射影.

定义 1.1.1 设 ξ,η 是共面的两相异直线,O 是两直线外一点.对于直线 ξ 上任一点 A,设 A' 是直线 OA 与 η 的交点,则由 $A\longrightarrow A'$ 定义的直线 ξ 上点与 η 上点的对应叫**直线中心射影**,简称为中心射影,O 是射影中心.

按照定义，中心射影的逆对应也是中心射影．如图 1－1－1 所示，如果 ξ 与 η 平行，那么中心射影是一个既单且满的映射，我们称为是一一映射．而如图 1－1－2，如果直线 ξ 与 η 相交，那么交点 D 是中心射影的不变点．这时直线 ξ 上存在一点 P 使得直线 OP 与 η 平行，根据中心射影的定义，ξ 上这样的点 P 没有像．另一方面直线 η 上也有一点 Q，OQ 与 ξ 平行，Q 不是 ξ 上任何点的像．P 与 Q 都叫做中心射影的影消点．出现这一情形的原因是欧氏空间中平行的直线不相交．因此如果 ξ 与 η 相交，那么 ξ 与 η 之间的中心射影不是通常意义下的映射．

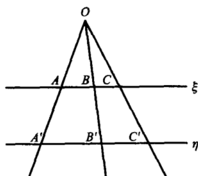


图 1－1－1

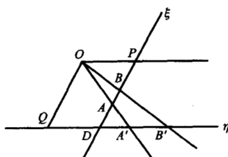


图 1－1－2

下面讨论平面之间的中心射影．

定义 1.1.2 设 π 与 π' 是欧氏空间中两个不同的平面，点 O 不在 π 上也不在 π' 上，对于平面 π 上任一点 A，如果直线 OA 交 π' 于 A'，则记为 $A'=\varphi(A)$．这样定义的平面 π 与 π' 之间的对应 $\varphi: \pi \longrightarrow \pi'$ 叫平面中心射影，也简称为中心射影，O 是射影中心．

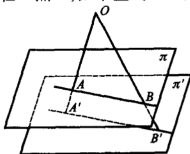


图 1－1－3

与直线之间的中心射影一样，平面中心射影的逆对应也是中心射影．如图 1－1－3，如果平面 π 与 π' 平

行，那么对于平面 π 上每一点都有 π' 上的点作为它的像．不难知道，这时中心射影 $\varphi:\pi\longrightarrow\pi'$ 是一一映射．中心射影 φ 把平面 π 上的直线变成 π' 上直线，把相交直线变成相交直线，平行直线变为平行直线．限制 φ 于平面 π 上某一条固定直线就得到直线之间的中心射影．

如果平面 π 与 π' 相交，那么两平面的交线上每一点在中心射影下是不变的．如图 1－1－4 所示，一般地 φ 仍把平面 π 上直线变为 π' 上直线，把相交直线变为相交直线．但是有例外情况，在图 1－1－4 中，设 ξ 是平面 π 上直线，使得过射影中心 O 与直线 ξ 的平面与 π' 平行，这时直线 ξ 上任一点在中心射影下没有像．这样的直线 ξ 叫做影消线．同样平面 π' 上也有直线 ξ'，过 ξ' 上任一点与 O 的连线平行于 π．易见 ξ' 上任一点都不是中心射影的像，ξ' 也叫平面 π' 上的影消线．因此在 π 与 π' 相交时，中心射影不是通常意义下的映射，原因与直线之间中心射影类似：平行平面、平行直线都不相交．

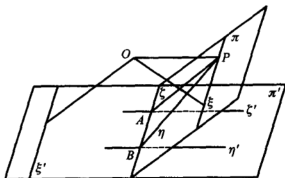


图 1－1－4

尽管中心射影有些缺憾，它还是有一些有趣的性质．下面举一些例子．

例 1　平行直线在中心射影下可以变成相交直线．

证　如图 1－1－5，设 O 是相交平面 π 与 π' 外一点，$ABCD$

是平面 π 上平行四边形，其一边 AD 在两平面交线上，四边形 $AB'C'D$ 是平行四边形 $ABCD$ 在以 O 为中心的中心射影下的像．如果 $AB'C'D$ 也是平行四边形，则线段 AD，BC，$B'C'$ 互相平行且相等，这样 $BCC'B'$ 也是平行四边形，这与 BB'，CC' 交于 O 矛盾．所以必有 AD 与 $B'C'$ 相交或 AB' 与 DC' 相交．这证明了中心射影下平行直线可变成相交直线．进一步讨论可以证明 AD 与 $B'C'$ 平行，而 AB' 与 DC' 相交．

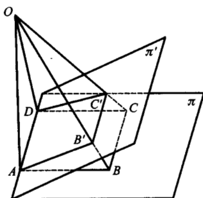


图 1－1－5

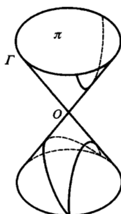


图 1－1－6

下面证明在图 1－1－4 中平面 π 上过影消线 ξ 上点的直线在中心射影下变成平行线．设 P 是 ξ 上一点，ζ，η 是平面 π 上过 P 的直线，它们分别交 π 与 π' 的交线于 A，B．设 ζ 与 η 在中心射影下的像是 ζ'，η'．从中心射影作法知道，直线 ζ'，η' 分别与 OP 平行，因此 ζ' 与 η' 平行．

例 2　中心射影可以把一个平面上的圆变成另一个平面上的双曲线、椭圆或者抛物线．

如图 1－1－6，设 Γ 是平面 π 上的圆，点 O 是平面 π 外一点．过 O 与 Γ 上所有点的连线构成以 O 为顶点的一个椭圆锥面．椭圆锥面与平面相交可以得到椭圆，也可以得到双曲线或者抛物线．例如，不过锥面顶点而平行于锥面的某一条母线的平面与锥面相

交得抛物线．变动此平面可得到双曲线或椭圆．

例 2 的严格证明可采用空间直角坐标，这时椭圆锥面是二次曲面，它与平面相交得二次曲线．而非退化的二次曲线只能是椭圆，抛物线，双曲线之一．

容易看出，在平面之间的中心射影下，两点之间的距离，两直线的夹角一般都是要改变的．所以中心投影下等边三角形或直角三角形的像一般不再是等边三角形或直角三角形．由前面讨论知道，三角形在中心射影下的像甚至可以不是三角形．例如，三角形的一个顶点在影消线上．

如果把点之间的距离，直线之间的夹角等叫做图形的度量性质，那么我们可以说，中心射影不保持图形的度量性质．

1.1.2 拓广欧氏平面

上面定义的直线与直线，平面与平面之间的中心射影一般不是一一的，并且有些点甚至没有确定的像．出现这种情况的原因是平行直线不相交．下面改造欧氏直线与平面，使得在改造以后的直线与平面上中心射影可以自然地扩充为一一的映射．

我们约定，对于每一条直线加上一个点，称为直线上的*无穷远点*；普通直线加上无穷远点以后称为*拓广直线*．添加的无穷远点把直线的左右两端连接起来，所以拓广直线可看成圆一样的封闭图形，如图 1－1－7．实际上可以按照图 1－1－8 的方式建立拓广直

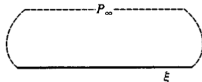


图 1－1－7

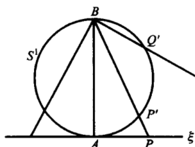


图 1－1－8

线与圆之间的一一对应.如图 1－1－8,设圆 S^1 与直线 ξ 相切于点A,点 B 是A 的对径点(即 AB 是圆的直径).建立圆与拓广直线的中心射影,圆上点 P'与B 的连线与ξ 的交点P 就是P'在此中心射影下的像,B 是射影中心.当 Q'在圆S^1 上离 B 越来越近时,Q'的像Q 在直线ξ 上离 A 越来越远,自然地我们可以定义圆 S^1 上点 B 的像是直线ξ 上的无穷远点.这样的中心射影建立了圆与拓广直线的一一对应,这样的对应是连续的.因此圆可以看成是拓广直线的一个直观模型.拓广直线与普通直线是不同的:拓广直线上一点不能把拓广直线分成不连通的两段;而拓广直线上的两普通点把它分成两段,其中一段包含无穷远点,另一段就是原来直线上的线段.

普通欧氏平面加上平面上所有直线的无穷远点以后称为*拓广欧氏平面*;也简称为*拓广平面*.这样,拓广欧氏平面上的点由两部分组成,一部分是原来平面上的点,称为普通点,另一种是添加的无穷远点.上面定的拓广直线也是拓广平面上的直线.关于添加的无穷远点以及它们与原有的普通点之间的关系,我们约定:

(ⅰ) 拓广平面上任意两条拓广直线如果作为普通直线平行,那么此两拓广直线上的无穷远点相同,否则不同;

(ⅱ) 拓广平面上所有的无穷远点构成一条直线,它上面没有普通点,这条直线称为*无穷远直线*.

从这些约定立即得出:普通平面上两条直线平行的充要条件是它们的拓广直线在拓广平面上交于无穷远点;一组平行直线相交于同一个无穷远点.这样,拓广平面上的直线也有两种:一种是添加无穷远点以后的拓广直线,此种直线上除一点外都是普通点;另一种是无穷远直线,这样的直线在拓广平面上只有一条.

下面的定理 1.1.1 与 1.1.2 给出了拓广欧氏平面上点与直线之间关系的重要性质.

定理 1.1.1 拓广平面上任意两点决定一条直线.

证 拓广平面上两点有三种情况:(1) 两个普通点;(2) 两个

无穷远点；(3) 一个普通点，另一个是无穷远点．前两种情况易证．下面设 A 是普通点，P_∞ 是无穷远点．由于无穷远点是在普通直线上添加的，不妨设 P_∞ 是拓广直线 ξ 上的无穷远点．如果点 A 在 ξ 上，则 ξ 就是过 A 与 P_∞ 的拓广直线．如果 A 不在 ξ 上，作过 A 关于 ξ 的平行线 η，由上面约定(ⅰ)，P_∞ 也是 η 上的无穷远点，因此 η 决定的拓广直线(仍记为 η)就是过 A 与 P_∞ 的直线．由于过 A 关于 ξ 平行的直线只有一条，过 A 与 P_∞ 的拓广直线是唯一的．

定理 1.1.2 拓广平面上任意两直线交于一点．

证 拓广平面上的两条直线有两种情况：(1) 两条拓广直线；(2) 一条拓广直线，另一条无穷远直线．设 ξ，η 是两条拓广直线，若它们交于无穷远点，则 ξ，η 作为普通直线平行；如果 ξ，η 作为普通直线不平行，则交于一个普通点．如果 ξ 与 η 交于两点，则它们重合．而一条拓广直线与无穷远直线交于此拓广直线上的无穷远点．因此拓广平面上任意两条直线交于一点．

利用拓广平面的这些性质，容易把前面定义的中心射影扩充成为它们各自决定的拓广直线与拓广平面之间的一一映射．以平面为例，如图 1－1－3，如果平面 π 与 π' 平行，平面 π 内直线 AB 在中心射影下的像是平面 π' 内与 AB 平行的直线 $A'B'$，补充定义以 O 为中心的中心射影把直线 AB 上无穷远点变成 $A'B'$ 上无穷远点．这一无穷远点是共面直线 AB，$A'B'$ 各自生成的拓广直线上的交点．这样，如果仍以 π，π' 表示 π 与 π' 的拓广平面，那么中心射影成为拓广平面 π 与 π' 之间的映射，它把 π 上拓广直线变为 π' 上拓广直线，把 π 上的无穷远直线变成 π' 上无穷远直线．

在图 1－1－4 情况，仍以 π，π' 表示平面 π 与 π' 决定的拓广平面．设 P 是平面 π 上影消线上的点，ζ 是 π 上过 P 的直线，ζ' 是中心射影下 ζ 的像．由于 ζ' 与 OP 平行，它们生成的拓广直线交于无穷远点，自然地定义 ζ' 上的无穷远点作为 P 的像，我们在前面已经证明，平面 π 上过 P 的直线(除了影消线 ξ)在中心射影下的像

是平行线，这样定义的 P 的像与过 P 的直线的选取无关．由于 P 是 ξ 上任一点，影消线 ξ 在中心射影下的像是拓广平面 π' 的无穷远直线．类似地定义拓广平面 π 上的无穷远直线的像，这些像构成影消线 ξ'．这样，中心射影 φ 扩充成为拓广平面 π 与 π' 之间的映射：对于拓广平面 π 上任一点，它与射影中心 O 的连线与 π' 的交点就是 π 上点的像．易见扩充后，φ 是拓广平面 π 与 π' 之间的一一映射，φ 把共线点变成共线点，相交直线的交点变成像直线的交点．扩充后的 φ 仍旧叫做拓广平面 π 与 π' 之间的中心射影．

拓广平面是射影平面的一个模型，所以中心射影也可以看成射影平面之间的一种映射，它是一种特殊的直射，见§2.3．类似地，拓广直线是射影直线的一个模型，拓广直线之间的中心射影对应于射影平面上直线之间的透视，见§2.1．

在普通平面上，一条直线可以把平面分成不连通的两部分．但是在拓广平面上一条拓广直线不能把它分成不连通的两部分．如图 1－1－9，ξ 是一条直线，A，B 是 ξ 两侧的点．过 A，B 的直线上包含无穷远点的连接 A，B 的线段与直线 ξ 不相交（两直线只有一个交点，连接 A，B 的由普通点组成的线段与 ξ 相交）．因此在 ξ 两侧的点 A，B 可以用不与 ξ 相交的线段连接．这说明直线 ξ 不能把拓广平面分成不连通的两部分．同样不难知道，图 1－1－10 中两拓广直线 ξ，η 将拓广平面所分区域中，标记为Ⅰ，Ⅱ的两部分分

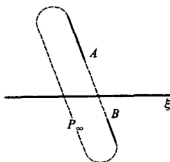


图 1－1－9

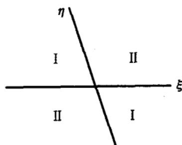


图 1－1－10

别是连通的.可以证明,Ⅰ,Ⅱ两部分是互不连通的(证明可利用§1.2 中射影平面的半球面模型).

由于中心射影保持拓广平面上点和直线的结合关系,即它把共线点变成共线点,相交直线变成相交直线,交点变成交点.利用这一性质可以解决一些欧氏几何的问题.不难知道,适当安排两平面的位置,适当选取射影中心,可以使一平面上任意取定的直线在中心射影下成为影消线,在中心射影下它的像成为无穷远直线,而过影消线上点的直线成为一组平行线.

例 3 设过点 S 的三直线分别交直线 ξ 与 η 于 $A,B,C;A',B',C'$. O 是直线 ξ 与 η 的交点.试证,四点 $O,P=AB'\times A'B,Q=AC'\times A'C,R=BC'\times B'C$ 共线.

证 把图 1-1-11 中图形看成拓广平面上的图形,作中心射影,使直线 OS 成为无穷远直线,各点在中心射影后的记号不变.经过中心射影,ξ,η 成为平行线,直线 AA',BB',CC' 也互相平行.这样 P,Q,R 成为三个平行四边形对角线的交点,所以 P,Q,R 共线,且所在直线与 ξ,η 平行,即 P,Q,R 与 ξ,η 上的无穷远点共线.由于中心射影保持共线关系,因此中心射影前的四点 O,P,Q,R 也共线.

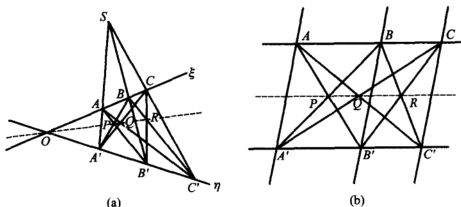


图 1-1-11

1.1.3 齐次坐标

下面给出拓广平面的解析模型.

取定普通平面上直角坐标系,点的坐标用数组(x,y)表示,其中x,y可取一切实数.所有的数组(x,y)所成的集合与平面上的点是一一对应的,为了表示无穷远点,我们引进齐次坐标.

定义 1.1.3 如果点P的直角坐标是(x,y),那么称(x_1, x_2, x_3)是P的齐次坐标,其中x_1,x_2,x_3满足$x=\dfrac{x_1}{x_3}$,$y=\dfrac{x_2}{x_3}$,$x_3\neq 0$.

从定义知道,三数组$(3,5,2)$与$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2},1\right)$是同一点$P\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)$的齐次坐标,如果$\lambda\neq 0$,则$(3\lambda,5\lambda,2\lambda)$也都是$P$的齐次坐标.坐标原点$O(0,0)$的齐次坐标可以是$(0,0,\rho)(\rho\neq 0)$中任意一个.由定义,同一点的不同的齐次坐标的分量相差一个非零常数因子,三数组(x_1,x_2,x_3)与$\lambda(x_1,x_2,x_3)=(\lambda x_1,\lambda_2 x_2,\lambda x_3)$表示同一个点$\left(\dfrac{x_1}{x_3},\dfrac{x_2}{x_3}\right)$,$x_3\neq 0$,$\lambda\neq 0$.这样,欧氏平面上一点$(x,y)$的齐次坐标是成比例的一类三数组$\{(\rho x,\rho y,\rho)\mid \rho\in\mathbf{R},\rho\neq 0\}$中的任何一个.反过来,如果$(x_1,x_2,x_3)$中的$x_3\neq 0$,那么它是以$x=\dfrac{x_1}{x_3}$,$y=\dfrac{x_2}{x_3}$为坐标的点的齐次坐标.

设ξ: $\xi_1 x+\xi_2 y+\xi_3=0$是直线的直角坐标方程,ξ_1,ξ_2不全为0.以$x=\dfrac{x_1}{x_3}$,$y=\dfrac{x_2}{x_3}$代入得直线ξ的齐次坐标方程:

$$\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3=0,$$

这是x_1,x_2,x_3的一次齐次方程.设

$$\eta:\eta_1 x_1+\eta_2 x_2+\eta_3 x_3=0$$

是另一条直线的齐次坐标方程.由于 ξ,η 是相异的两直线,ξ_1,ξ_2,ξ_3 与 η_1,η_2,η_3 不能成比例.下面计算 ξ 与 η 的交点.

(1) 如果 ξ 与 η 不平行,则 $\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{vmatrix}\neq 0$.这时交点的直角坐标是

$$x=\frac{\begin{vmatrix}\xi_2 & \xi_3\\ \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}\xi_3 & \xi_1\\ \eta_3 & \eta_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{vmatrix}}.$$

交点的齐次坐标可取为 $\left(\begin{vmatrix}\xi_2 & \xi_3\\ \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\xi_3 & \xi_1\\ \eta_3 & \eta_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{vmatrix}\right)$,这是一个普通点的齐次坐标.

(2) 如果 ξ 与 η 平行,这时 $\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{vmatrix}=0$,$\xi$ 与 η 没有普通点作为交点,也就是说任何(x_1,x_2,x_3),$x_3\neq 0$,不可能同时满足 ξ 与 η 的方程.三数组$(\xi_2,-\xi_1,0)$或者与之成比例的$(\eta_2,-\eta_1,0)$满足直线 ξ 与 η 的方程,$(\xi_2,-\xi_1,0)$不是普通点的齐次坐标.$(\xi_2,-\xi_1,0)$也满足与 ξ 平行的任一直线的方程:

$$\xi_1x_1+\xi_2x_2+kx_3=0,$$

其中 k 为任意实数.

从这些讨论,我们自然地将满足直线方程

$$\xi:\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0$$

的三数组$(\xi_2,-\xi_1,0)$作为直线 ξ 上无穷远点的齐次坐标.这样,直线 ξ 的齐次坐标方程可以看成 ξ 决定的拓广直线的方程.满足 $\xi:\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0$ 的三数组(x_1,x_2,x_3)(x_1,x_2,x_3 不全为0)就是 ξ 上点的齐次坐标,$x_3\neq 0$ 对应普通点,$x_3=0$ 决定无穷远点.例如(1,2,0)是直线 $2x_1-x_2+\lambda x_3=0$ 上的无穷远点(λ 可

取任意实数). x 轴上的无穷远点可用$(1,0,0)$表示, y 轴上的无穷远点用$(0,1,0)$表示. 自然地, 无穷远直线的方程可写成

$$\alpha_\infty : x_3 = 0.$$

如图 1－1－12, 直线 $\xi: \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ 与 x 轴夹角为 α, $\tan \alpha = -\dfrac{\xi_1}{\xi_2}$, $\cos \alpha : \sin \alpha = -\xi_2 : \xi_1$ 是直线 ξ 的方向. 与直线 ξ 平行的直线的方向也是 $-\xi_2 : \xi_1$. 如果 $\xi_1 \neq 0$, 那么 ξ 上任一普通点可用 $\left(-\dfrac{1}{\xi_1}(\xi_2 t + \xi_3), t\right)$表示, 相应的齐次坐标是$(-\xi_2 t - \xi_3, t\xi_1, \xi_1)$. 当 $t \neq 0$, 它也可表示成 $\left(\xi_2 + \dfrac{1}{t}\xi_3, -\xi_1, -\dfrac{1}{t}\xi_1\right)$. t 趋于无穷大, 也就是直线 ξ 上点趋于无穷远点时, 可得极限$(\xi_2, -\xi_1, 0)$. 这从另一角度说明了以$(\xi_2, -\xi_1, 0)$表示直线 ξ 上无穷远点的合理性, 用$(\xi_2, -\xi_1, 0)$表示无穷远点也符合前面的约定(ⅰ)与(ⅱ).

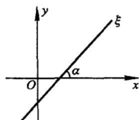


图 1－1－12

这样, 拓广欧氏平面上的直线也都可用 x_1, x_2, x_3 的一次齐次方程表示:

$$\xi: \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

其中系数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 不能全为 0; 如果 ξ_1, ξ_2 不全为 0, 它表示一条拓广直线, 如果 ξ_1, ξ_2 都等于 0, 这时 $\xi_3 \neq 0$, 此即 $\alpha_\infty : x_3 = 0$, 是无穷远直线的方程. 显然直线 ξ 与 $\eta: \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0$ 表示同一直线, 即 ξ 与 η 重合的充要条件是$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \eta_1 : \eta_2 : \eta_3$. 所以拓广平面上直线 $\xi: \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ 也可以用三数组(ξ_1, ξ_2, ξ_3)表示, 称它是直线 ξ 的齐次坐标或 ξ 的线坐标. 易见直线的线坐标也是齐次坐标, 例如 $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$ 的线坐标是$(2, -3, 5)$或$\left(\dfrac{2}{5}, -\dfrac{3}{5}, 1\right)$, 或$(4, -6, 10)$.

拓广平面上点与直线以及它们的关系在齐次坐标下可以总结为以下几点：

(1) 拓广平面上点可以用齐次坐标(x_1,x_2,x_3)表示，成比例的齐次坐标表示同一点，x_1,x_2,x_3 不全为 0. 当 $x_3\neq 0$ 时，(x_1,x_2,x_3)表示普通点；当 $x_3=0$ 时表示无穷远点.

(2) 拓广平面上直线也可用齐次坐标(ξ_1,ξ_2,ξ_3)表示，ξ_1,ξ_2 不全为零时是拓广直线；$\xi_1=\xi_2=0$，而 $\xi_3\neq 0$，表示无穷远直线.

(3) 过两个不同点 $A(a_1,a_2,a_3)$，$B(b_1,b_2,b_3)$的直线 ξ 的齐次坐标是

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

(4) 两直线 $\xi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，$\eta(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$的交点 A 的齐次坐标是

$$\left(\begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_1 \\ \eta_3 & \eta_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}\right).$$

上面(3)与(4)的证明很容易. 例如，点 A 与 B 都满足 ξ 的方程

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}x_1+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}x_2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}x_3=0,$$

因此它是过 A,B 的直线方程. 可以证明. 如果 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$，但 a_1,a_2 不全为 0，则 $\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},0\right)$ 与$(a_2,-a_1,0)$成比例. 这时过 A,B 的直线可以表示为 $a_2x_1-a_1x_2=0$. 类似情形对(4)也成立.

再一次指出，齐次坐标的分量不能全为 0，(0,0,0)不表示任何点与直线的齐次坐标. 如果容许(0,0,0)表示点，这一点将在任

一直线 $\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3=0$ 上. 另外, 数组(1,2,3)可表示点的齐次坐标, 也可表示直线的齐次坐标, 这要看具体情况, 由上下文决定.

如果把拓广平面上的点(普通点与无穷远点)不加区分, 直线(拓广直线与无穷远直线)也不加区分, 同等看待, 就得到射影平面. 所以拓广平面是射影平面的一个模型. 弄清拓广平面的构造有助于我们学习与理解射影几何. 另一方面, 从拓广平面上去掉无穷远直线就回到普通平面. 而射影几何的定理与性质都可以在拓广平面上体现, 经过适当的解释就能运用到欧氏几何上. 以后会看到射影几何不但可用于研究欧氏几何, 也可以用于研究其他几何, 如仿射几何, 双曲几何, 椭圆几何等.

改造欧氏直线与平面的方法也可以用于高维欧氏空间, 也可以运用于仿射空间, 得到高维的拓广空间, 从而得到高维射影几何的模型. 例如, 在三维欧氏空间中, 对于每一条直线添加一个无穷远点, 空间的平行直线上的无穷远点相同. 约定同一平面上的所有直线上的无穷远点构成该平面上的无穷远直线; 而空间的所有的无穷远点构成一个平面, 叫无穷远平面, 并且其上没有普通直线生成的拓广直线, 也没有普通点. 这样得到的空间叫拓广欧氏空间, 它是三维射影空间的一个模型. 如果 (x,y,z) 是欧氏空间中点的直角坐标, 对应的齐次坐标是 (x_1,x_2,x_3,x_4), 其中 $x_4\neq 0$, $x=\dfrac{x_1}{x_4}$, $y=\dfrac{x_2}{x_4}$, $z=\dfrac{x_3}{x_4}$. 拓广空间的无穷远平面的方程是 $x_4=0$. 显然, 由三维欧氏空间中任一平面生成的拓广平面是这样生成的拓广空间的子空间. 如果平面的方程是

$$\xi_1 x+\xi_2 y+\xi_3 z+\xi_4=0,$$

ξ_1,ξ_2,ξ_3 不全为 0, 那么此平面生成的拓广平面是

$$\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3+\xi_4 x_4=0.$$

满足此方程的 (x_1,x_2,x_3,x_4) 中如果 $x_4=0$, 它是此平面上无穷远点的齐次坐标.

欧氏空间中直线可看成空间两平面的交线，空间直线可表示成

$$\begin{cases}\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3+\xi_4 x_4=0,\\ \eta_1 x_1+\eta_2 x_2+\eta_3 x_3+\eta_4 x_4=0.\end{cases}$$

此式中 ξ_1,ξ_2,ξ_3 与 η_1,η_2,η_3 不成比例，这一直线是欧氏空间中普通直线. 如果 ξ_1,ξ_2,ξ_3 与 η_1,η_2,η_3 成比例，自然 $\xi_1:\xi_2:\xi_3:\xi_4\neq\eta_1:\eta_2:\eta_3:\eta_4$，平面 $\xi_1 x+\xi_2 y+\xi_3 z+\xi_4=0$ 和 $\eta_1 x+\eta_2 y+\eta_3 z+\eta_4=0$ 平行. 如果 ξ_1,ξ_2,ξ_3 不全为 0，此两平面的交线也可以表示成

$$\begin{cases}\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3=0,\\ x_4=0.\end{cases}$$

这是拓广平面 $\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3+\xi_4 x_4=0$ 上的无穷远直线.

习题 1.1

1. 写出下列各直线上的无穷远点的齐次坐标：

(1) $y=\frac{3}{4}x+6$，(2) $3x+y=0$，(3) x 轴与 y 轴的角平分线.

2. 已知四直线 $\xi: x_1-x_2=0$，$\eta: x_1+x_2=0$，$\varepsilon: 2x_1+x_2-x_3=0$，$\tau: x_1+x_2+2x_3=0$. 试求直线 $(\xi\times\eta)\times(\varepsilon\times\tau)$ 与 $(\xi\times\tau)\times(\varepsilon\times\eta)$ 的方程.

3. 试求以 $x_1+x_2-x_3=0$，$2x_1-x_2=0$，$x_1-x_2+x_3=0$ 为边的三角形的顶点的坐标.

4. 证明：(1) 任意三角形经过中心射影可以成为等边三角形；

(2) 任意平面四边形可以经中心射影成为平行四边形.

5. 设三条定直线 ξ,η,ζ 交于点 O，点 A,B 与 O 共线，设 P 是直线 ξ 上动点，PA,PB 分别交 η,ζ 于 Q,R，求证 QR 过直线 AB 上一定点.

6. 设 A,B 是定直线 ξ 外两定点，X,Y 是 ξ 上任意两点，记 $M=AY\times BX$，$N=AX\times BY$. 求证 MN 过 AB 上一定点.

7. 下列欧氏平面上的图形或量，哪些在中心射影下可能改变：

平行直线；三共线点；三直线交于一点；两点之间距离；两直线的夹角；三角形；梯形；三角形三边上高的交点；直角三角形；圆；双曲线.

如果把它们看成拓广平面上的图形或量,哪些在中心射影下不改变?

§1.2 射影平面

1.2.1 射影平面的定义

如果把拓广直线上的点不加区别,也就是不再区分普通点与无穷远点,所得到的直线叫做**射影直线**.同样对于拓广平面上的普通点与无穷远点也不加区别,同等看待,所得到的平面叫**射影平面**,它上面的点叫**射影点**.射影点经常简称为点,射影平面记为P^2.把拓广平面上的两种直线(拓广直线与无穷远直线)也不加区别都作为射影平面上的射影直线,简称为直线.根据这一定义,从定理1.1.1与1.1.2知道,射影平面上点与直线的基本关系是

定理1.2.1 (i)过射影平面上任意两个射影点有且只有一条射影直线;

(ii)射影平面上任意两条射影直线交于一个射影点.

从§1.1的讨论知道,射影平面上的点可用非零三数组表示.点A可用(a_1,a_2,a_3)表示,其中a_1,a_2,a_3是不全为零的三个实数,三数组$(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$也表示点$A$,$\lambda\neq 0$. $a=(a_1,a_2,a_3)$叫做点A的齐次坐标或者解析表示.三数组(p_1,p_2,p_3)与(q_1,q_2,q_3)表示同一点的条件是p_1,p_2,p_3与q_1,q_2,q_3成比例.射影平面上直线在齐次坐标下用x_1,x_2,x_3的一次齐次方程表示

$$\xi:\ \xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0,$$

它的系数ξ_1,ξ_2,ξ_3不能全为0,直线ξ的方程被$\xi_1:\xi_2:\xi_3$确定,三数组(ξ_1,ξ_2,ξ_3)叫做直线ξ的线坐标或者解析表示.例如$2x_1+3x_2-x_3=0$是一条射影直线的方程,点$A(3,2,12)$,$B(3,-2,0)$都是此直线上的点,而$D(1,1,1)$不满足方程$2x_1+3x_2-x_3=0$,因此D不是此直线上的点.直线$2x_1+3x_2-x_3=0$的线坐标是$(2,3,-1)$,

也能写成$(-2,-3,1)$等. 利用矩阵乘法,直线 ξ 的方程可以写成

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=0,$$ 简记为 $x^{\mathrm{T}}\cdot\xi=0$ 或 $\xi^{\mathrm{T}}\cdot x=0$.

与§1.1一样,以后常用 $A,B,C,\cdots$ 等英文大写字母表示射影平面 P^2 上的点,用相应的小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示该点的解析表示或坐标. 用小写希腊字母 $\xi,\eta,\cdots$ 表示射影直线,它们的解析表示也用同一字母表示. 在讲述射影坐标以后,也用 $a,b,c,\cdots$ 表示点 $A,B,C,\cdots$ 的射影坐标,同样,$\xi,\eta,\cdots$ 既表示直线也表示它们的射影线坐标.

点与直线都用非零三数组或齐次坐标表示,一个具体的三数组如$(1,2,3)$是表示点还是直线的齐次坐标要看具体场合,由上下文确定.

下面介绍一些射影平面上的基本图形.

直线是由点构成的,直线也常叫做*点列*. 按照这一看法,直线 ξ 也可表示成 $\xi(P,Q,\cdots)$,其中 $P,Q,\cdots$ 是 ξ 上点,点列也简记为 $\xi(P)$. 与此相对应,过一个定点的所有直线构成的图形叫*线束*. 由点 S 决定的线束记为 $S(\xi,\eta,\cdots)$,其中 $\xi,\eta,\cdots$ 是线束 S 中直线,S 叫*线束的中心*. 从直线的方程不难知道,点 $S(s_1,s_2,s_3)$ 决定的线束 S 中直线 ξ 满足

$$s_1\xi_1+s_2\xi_2+s_3\xi_3=0,$$

在这一方程中,s_1,s_2,s_3 是点 S 的坐标分量,是常数,而(ξ_1,ξ_2,ξ_3)是未知的. 这一方程叫线束 S 的方程,有时也称为点 S 的方程. 例如

$$3\xi_1+5\xi_2-7\xi_3=0$$

是以 $A(3,5,-7)$为中心的线束的方程,满足这一方程的(ξ_1,ξ_2,ξ_3)是线束 A 中直线的坐标,ξ_i 不全为 0.

定义 1.2.1 射影平面上不共线的三点及它们的两两连线构

成的图形叫*三点形*，此三点叫三点形的顶点，每两个顶点的连线叫三点形的边.

如图 1-2-1，A，B，C 是三点形 ABC 的顶点，AB，BC，CA 是它的三条边.对应地

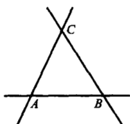


图 1-2-1

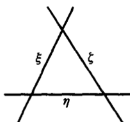


图 1-2-2

定义 1.2.2 三条不通过同一点的直线及两两交点构成的图形叫做*三线形*，三条直线叫三线形的边，每两条边的交点叫三线形的顶点.

如图 1-2-2，ξ，η，ζ 构成一个三线形，这一三线形记为 $\xi\eta\zeta$.从定义不难看出，三点形与三线形从图形上是不能区分的，它们都是由不共线的三点及两两连线构成的图形，区别仅在于先有点还是先有直线.以后我们会看到在射影几何里作这样的区分是有意义的，也是必要的.

1.2.2 点与直线的结合关系

平面射影几何主要研究射影平面上的点与直线以及它们的相互关系.如果点 A，B，C，…在一条直线上，我们称它们*共线*；如果直线 ξ，η，…属于同一线束，即它们交于同一点，称这些直线*共点*.点与点，直线与直线，点与直线的关系总称为点与直线的*结合关系*.点与直线的基本关系是：点在还是不在直线上.

下面讨论点与直线的结合关系的解析表示.

性质 1.2.2 过两点 $A(a_1,a_2,a_3)$，$B(b_1,b_2,b_3)$ 的直线方

程是

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

直线 AB 的线坐标是 $\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$.

证 由于 A,B 是相异两点,(a_1,a_2,a_3)与(b_1,b_2,b_3)不成比例,上面的方程是 x_1,x_2,x_3 的一次方程,它表示一条直线.另一方面,A,B 满足此方程,它表示过 A,B 的直线.按照第一行展开此行列式得到

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x_3 = 0.$$

因此直线 AB 的线坐标是 $\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$.

推论 1.2.3 三相异点 $A(a_1,a_2,a_3)$,$B(b_1,b_2,b_3)$,$C(c_1,c_2,c_3)$ 共线的充要条件是下列条件之一成立:

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$; (2) $c = \lambda a + \mu b$ (λ,μ 全不为零);

(3) $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$ ($\lambda\mu\nu \neq 0$).

证 三相异点 A,B,C 共线的充要条件是 C 在直线 AB 上.由性质 1.2.2,A,B,C 共线的充要条件是(1)成立.由于 a,b,c 两两不成比例,不难看出条件(1),(2),(3)是等价的.

推论 1.2.4 直线 AB 上任一点 C 可以表示为 $c = \lambda a + \mu b$,λ,μ 不全为 0.

如果 $\lambda = 0,\mu \neq 0$,这时 $c = \mu b$,它表示 C 与 B 重合.如果 $\lambda \neq 0,\mu = 0$,则 C 与 A 重合.如果 $\lambda \neq 0,\mu \neq 0$,则由 $c = \lambda a + \mu b$ 决定的点 C 与 A,B 都相异.

类似于性质 1.2.2,可以证明.

性质 1.2.5 由两直线 $\theta(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$,$\psi(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$的交点决定的线束的方程是

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

点 $\theta\times\psi$ 的齐次坐标是$\left(\begin{vmatrix} \theta_2 & \theta_3 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \theta_3 & \theta_1 \\ \psi_3 & \psi_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix}\right)$.

例如直线 $\theta:3x_1+x_2-x_3=0$ 与 $\psi:x_1-2x_3=0$ 的交点 $\theta\times\psi$ 的坐标是$\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)$,即$(2,-5,1)$.点 $\theta\times\psi$ 决定的线束的方程是

$$2\xi_1-5\xi_2+\xi_3=0.$$

此方程也叫做点 $\theta\times\psi$ 的方程.

推论 1.2.6 三相异直线 $\zeta(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$,$\theta(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$,$\psi(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$交于一点的充要条件是下列条件之一成立:

(1) $\begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0$; (2) $\zeta=\lambda\theta+\mu\psi \quad (\lambda\mu\neq 0)$;

(3) $\lambda\zeta+\mu\theta+\nu\psi=0 \quad (\lambda\mu\nu\neq 0)$.

推论 1.2.7 过直线 θ 与 ψ 的交点的任一直线 ξ 可表示为 $\xi=\lambda\theta+\mu\psi$,$\lambda,\mu$ 不全为 0.

所以由直线 θ 与 ψ 的交点决定的线束中任一直线可以表示成 $\lambda\theta+\mu\psi$,其方程是

$$(\lambda\theta_1+\mu\psi_1)x_1+(\lambda\theta_2+\mu\psi_2)x_2+(\lambda\theta_3+\mu\psi_3)x_3=0.$$

例如,$\lambda x_1+\mu x_2-(\lambda-2\mu)x_3=0$,$\lambda,\mu$ 是参数,表示直线 $x_1-x_3=0$ 与 $x_2+2x_3=0$ 的交点决定的线束中直线,它的线坐标是$(\lambda,\mu,-\lambda+2\mu)$.两直线 $x_1-x_3=0$ 与 $x_2+2x_3=0$ 的交点是(1,

$-2,1)$，此线束的方程是

$$\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 = 0.$$

细心的读者可能已经发现，上面表示点与直线结合关系的运算与三维欧氏空间中向量的数乘，内积，外积，混合积等运算有密切的关系. 如果把点 $P(x)$ 与直线 ξ 的齐次坐标看作向量，则点 P 在直线 ξ 上用 $x\cdot\xi=0$，即 $x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0$ 表示，这里"·"相当于直角坐标下两向量的内积. 点 $P(x)$ 的不同的解析表示 $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$，$\lambda \neq 0$，相当于向量与实数的乘法，叫数乘. 而两直线 ξ, η 的交点 $\xi \times \eta$ 以及两点 A, B 的连线在齐次坐标下的计算方法相当于向量的外积. 判断三点 A, B, C 共线与否相当于考虑向量 a, b, c 的混合积 $|a, b, c| = (a \times b)\cdot c$ 是否为 0. 类似地，直线 ξ, η, ζ 共点等价于 $|\xi, \eta, \zeta| = 0$.

1.2.3 射影平面的模型

从射影平面的定义知道，拓广欧氏平面是射影平面的一个模型，关于射影平面上得到的一切结果自然可以运用于拓广平面. 拓广平面是在欧氏平面上加上一条无穷远直线得到的，所以射影平面上的定理经过适当的解释就可以运用于欧氏几何. 另一方面，在射影几何里我们常常要利用图形来帮助我们理解并解决射影几何问题，所作图形自然应看成是拓广平面上的图形.

射影平面上的点可用非零三数组表示. 三维欧氏空间的点在直角坐标下也可用三数组表示，$O(0,0,0)$ 是坐标原点. 如果射影平面上的点 A 的齐次坐标是 $(1,2,3)$，那么对任何非零常数 λ，$(\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$ 也是点 A 的齐次坐标，所有这样的 $(\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$ 组成三维欧氏空间中一条过原点的直线（此直线上原点除外），$(1,2,3)$ 可以看成此直线的一个方向. 因此射影平面上的点与三维欧氏空间中所有过原点的直线之间存在着一一对应. 从射影直线的方程

$$\xi: \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

不难看出直线 ξ 上所有的射影点在上面的对应中对应于三维欧

氏空间中以(ξ_1, ξ_2, ξ_3)为法矢,过原点的平面上过原点的所有直线.因此三维欧氏空间中所有过原点的直线组成的集合可以看作射影平面的又一个模型.在这个模型中,每一条过原点的直线相当于一个射影点,过原点的一个定平面上所有过原点的直线的集合相当于一条射影直线.熟悉线性代数的读者也可以采用下面的射影平面的模型.

设 V 是一个三维实线性空间,它的每个一维子空间作为一个射影点,V 的一个二维子空间对应于一条射影直线,此子空间的一维子空间是此直线上的射影点.

这一定义很容易推广到高维情况.

以原点为球心的单位球面 S^2 与每一条过原点的直线交于两个点,此两点称为一对对径点.所以把球面 S^2 上的两个对径点看作同一点可得到射影平面的又一模型.在这一模型上,射影直线对应于过原点的平面与球面的交线(仍需将交线上对径点看做同一点).从这个模型上可以得到射影平面的一些有趣的拓扑性质(见§6.2).

射影平面的拓广平面模型与球面模型之间的对应可以经过球极投影实现.由于球面模型上两个对径点应看作同一点,因此射影平面也可在半球面上实现,这时只需把半球面截口上的对径点看成同一点,如图 1-2-3,设平面 π 与半球面相切,截口所在平面与 π 平行,由球心 O 与半球面上点的连线与平面 π 的交点建立的

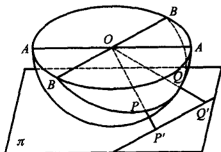


图 1-2-3

对应关系就是射影平面的这两种模型之间的对应关系.在图1-2-3上,半球面上点 P,Q 对应于平面 π 上点 P',Q'.在半球面模型上,由 P,Q 决定的射影直线是过 O,P,Q 的平面与半球面的交线,截口上对径点对应的射影点记为 B,点 B 在平面 π 上的对应点是直线 $P'Q'$ 上的无穷远点.射影平面的半球面模型与拓广平面之间的这种对应保持点和直线的结合关系,即它把共线点对应于共线点,直线交点对应直线交点.

从§1.1与上面讨论知道,射影直线与欧氏直线,射影平面与欧氏平面是很不一样的.射影直线是像圆一样的封闭图形,一点不能把射影直线分成不连通的两部分;射影直线上三点也不能像欧氏直线那样确定顺序关系:欧氏直线上三点总有一点在其他两点确定的有限长线段上.欧氏平面上一直线可把平面分成不连通的两区域;三条两两相交的直线把欧氏平面分成不连通的七个区域.而射影平面上一直线不能划分它成不连通的两部分;两两相交的三条射影直线把射影平面分成四个不连通的区域.在射影平面上任意两条直线交于一点,因此射影平面上不能像欧氏平面那样定义平行线.

虽然拓广平面是射影平面的一个模型,但由于在射影平面上不再有普通点与无穷远点之分,不能把欧氏平面上点的距离,直线的夹角等概念直接搬到射影平面上.射影平面上点之间的距离以及直线之间的夹角将在第六章定义并讨论,但是那里定义的射影平面上的距离与欧氏平面上的距离已很不一样.按照第六章的定义,射影平面上任两点之间距离不超过 $\frac{\pi}{2}$.按照拓扑学的术语,射影平面是紧致的曲面,射影平面上定义的这种距离反映了这一特性.

习题 1.2

1. 设 $(1,2,3)$,$(2,\lambda_1,\lambda_2)$,$(\mu_1,3,\mu_2)$ 表示同一点,求 $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2$.

2. 试证明三点 $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(2,3,5)$ 共线,写出它们所在直线的方程,指出点 $D(1,-1,1)$ 是否在此直线上.

3. 写出由点 $A(1,2,-1)$, $B(2,-1,2)$ 决定的线束的方程,找出两线束的公共直线.

4. 设 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ 是射影平面上三点,另外三点 $D(0,\lambda_1,\mu_1)$, $E(\lambda_2,0,\mu_2)$, $F(\lambda_3,\mu_3,0)$, $\lambda_i\mu_i\neq 0, i=1,2,3$,

(1) 试求三直线 AD, BE, CF 交于一点的充要条件,

(2) 试求三点 D, E, F 共线的充要条件.

5. 设 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $E(1,1,1)$ 是射影平面上的四点,记 $A'=AE\times BC$, $B'=BE\times AC$, $C'=CE\times AB$, $P=AB\times A'B'$, $Q=BC\times B'C'$, $R=CA\times C'A'$. 求出 P,Q,R 的齐次坐标;如果 P,Q,R 共线,写出所在直线的方程.

6. 设直线 $\xi(1,0,1)$, $\eta(0,1,1)$, $\zeta(1,1,0)$,写出三条直线的方程,证明它们构成三线形,并求出三线形的顶点.

§1.3 射影坐标

我们知道,欧氏几何(与仿射几何)中坐标是很重要的,通过直角坐标(或笛卡儿坐标),我们可以把许多几何问题转化为代数问题,这就是解析几何的方法. 与欧氏几何一样,射影平面上也可以定义坐标. 利用射影坐标常常可简化射影几何问题的计算与证明.

1.3.1 一维射影坐标

首先定义并讨论直线上点的射影坐标.

引理 1.3.1 设 A,B,C 是直线 ξ 上的相异三点,可以取它们的齐次表示 a^*, b^*, c^* 使

$$c^* = a^* + b^*.$$

证 由于 A,B,C 共线, a,b,c 是它们的齐次坐标,所以存在实数 λ,μ 使 $c=\lambda a+\mu b$ 且 $\lambda\mu\neq 0$. 记 $a^*=\lambda a$, $b^*=\mu b$, $c^*=c$,则 a^*, b^*, c^* 也是 A,B,C 的坐标表示,满足引理要求.

定义 1.3.1 设 A,B,C 是直线 ξ 上相异三点.分别取它们的解析表示使 $c^*=a^*+b^*$.对于 ξ 上任一点 $P(x)$,如果 $x=x_1a^*+x_2b^*$,则称 (x_1,x_2) 是点 P 在直线 ξ 上射影坐标系 $\{A,B;C\}$ 下的坐标,点 A,B 称为坐标系的基点,C 是单位点.

性质 1.3.2 在给定的射影坐标系 $\{A,B;C\}$ 下,点 P 的射影坐标 (x_1,x_2) 的分量只能相差一个非零常数的因子.即射影坐标是齐次坐标.

证 设 $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ 是 A,B,C 的另一组解析表示,于是存在实数 ε_i 使

$$\bar{a}=\varepsilon_1a^*,\bar{b}=\varepsilon_2b^*,\bar{c}=\varepsilon_3c^*,\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\neq 0.$$

从 $c^*=a^*+b^*,\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$ 得到

$$\varepsilon_1a^*+\varepsilon_2b^*=\varepsilon_3c^*=\varepsilon_3a^*+\varepsilon_3b^*.$$

所以 $(\varepsilon_1-\varepsilon_3)a^*+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)b^*=0$.由于 A,B 是相异两点,

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3.$$

对任意 $P\in\xi$, $p=(p_1,p_2,p_3)=x_1a^*+x_2b^*$ 与 $\rho p=\bar{x}_1\bar{a}+\bar{x}_2\bar{b}$, $\rho\neq 0$.由定义,P 在 a^*,b^*,c^* 下的坐标是 (x_1,x_2);在 $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ 下的坐标是 $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$.由于 $\rho p=\rho x_1a^*+\rho x_2b^*=\varepsilon_1\bar{x}_1a^*+\varepsilon_1\bar{x}_2b^*$,因此

$$\rho x_1=\varepsilon_1\bar{x}_1,\quad \rho x_2=\varepsilon_1\bar{x}_2,$$

即 $x_1:x_2=\bar{x}_1:\bar{x}_2$,所以射影坐标除一个非零常数因子外是唯一确定的.

上面证明中 $\rho p=\bar{x}_1\bar{a}+\bar{x}_2\bar{b}$ 的非零常数 ρ 的出现,是由于计算时点 P 的齐次坐标可用 $p=(p_1,p_2,p_3)$,也可用与它成比例的 $\rho p=(\rho p_1,\rho p_2,\rho p_3)$ 表示.

显然,坐标系基点 A,B 的坐标分别是 $(1,0)$ 与 $(0,1)$,单位点 C 的坐标是 $(1,1)$.

例 1 设 $A(1,2,3),B(-3,2,0),C(-1,6,6)$ 是平面上直线 ξ 上三点的齐次坐标,试求 ξ 上点 $P(-2,4,3)$ 在坐标系 $\{A,B;$

$C\}$下的坐标.

解 设 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ 使 $c=\lambda a+\mu b$,即

$$\begin{cases}\lambda-3\mu=-1,\\ 2\lambda+2\mu=6,\\ 3\lambda=6.\end{cases}$$

解之得 $\lambda=2,\mu=1$. 因此可取解析表示 $a^*=(2,4,6)$, $b^*=(-3,2,0)$, $c^*=(-1,6,6)$. 由 $(-2,4,3)=x_1a^*+x_2b^*$,即

$$\begin{cases}2x_1-3x_2=-2,\\ 4x_1+2x_2=4,\\ 6x_1=3,\end{cases}$$

解得 $x_1=\dfrac{1}{2},x_2=1$. 因此点 $P(-2,4,3)$在 ξ 上射影坐标系$\{A,B;C\}$下的坐标是$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$,也可写成(1,2).

射影直线上的点要采用齐次坐标(x_1,x_2)表示,而不能像欧氏直线那样用一个实数表示,这是因为射影直线是像圆一样的封闭图形,不能建立与实数的一一对应. 利用 $x=\dfrac{x_1}{x_2}$也可以得到射影直线的非齐次坐标,但这时必须引进记号∞,它对应于坐标是(1,0)的点. 自然也可用 $y=\dfrac{x_2}{x_1}$得到射影直线上除去点(0,1)以外的点的非齐次坐标. 如果点(x_1,x_2)中 x_1,x_2 均不为 0,则它可以有两个非齐次坐标,$x=\dfrac{x_1}{x_2},y=\dfrac{x_2}{x_1}$. 它们之间的关系是

$$x=\frac{1}{y}.$$

类似地可定义线束中直线的射影坐标.

定义 1.3.2 设 η,ζ,θ 是线束 S 中三相异直线,分别取解析表示 η^*,ζ^*,θ^*,使 $\theta^*=\eta^*+\zeta^*$. 对线束 S 中任意直线 ξ, $\xi=$

$\lambda_1\eta^* + \lambda_2\zeta^*$,则称$(\lambda_1,\lambda_2)$是直线 ξ 在射影坐标系$\{\eta,\zeta;\theta\}$下的坐标,η,ζ 称为坐标系的基线,θ 是单位直线.

与直线上点的射影坐标一样,线束中直线的射影坐标也是齐次坐标,η,ζ,θ 在坐标系$\{\eta,\zeta;\theta\}$下的坐标分别是(1,0),(0,1),(1,1).

例 2 如图 1-3-1,设线束 S 中直线 η,ζ,θ 交一直线分别于A,B,C. ξ 是线束 S 中任一直线,P 是ξ 与 AB 的交点.则点 P 在坐标系$\{A,B;C\}$下坐标与 ξ 在坐标系$\{\eta,\zeta;\theta\}$下坐标相同(允许差一非零常数的因子).

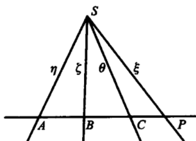


图 1-3-1

证 易见,直线 η,ζ,θ 的直线坐标由 A,B,C,S 决定,即 $\eta^* = s\times a^*$,$\zeta^* = s\times b^*$,$\theta^* = s\times c^*$,这里 $s\times a^*$ 表示由 S,A 的齐次坐标 s,a^* 计算 η 的齐次坐标 η^*,其余类似.如果 $c^* = a^* + b^*$,则 $\theta^* = \eta^* + \zeta^*$.设 $P(x)$是直线 AB 上任一点,$x = x_1a^* + x_2b^*$,则 $s\times x = x_1 s\times a^* + x_2 s\times b^* = x_1\eta^* + x_2\zeta^*$.因此$(x_1,x_2)$既可作为点 P 在$\{A,B;C\}$下坐标,也可以作为直线 $\xi = SP$ 在$\{\eta,\zeta;\theta\}$下的坐标.

1.3.2 一维射影坐标变换

直线上取定三点就可以决定一个射影坐标系.所以直线上可有许多射影坐标系,从而直线上同一点在不同的射影坐标系下有不同的射影坐标.下面的性质给出同一直线上点在不同坐标系下坐标之间的关系,即给出了坐标变换公式.

性质 1.3.3 设$\{A,B;C\}$与$\{\bar{A},\bar{B};\bar{C}\}$是直线 ξ 上的两个坐标系,ξ 上点P 的坐标分别是(x_1,x_2),(x_1',x_2'),则有

$$\begin{cases}\rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,\end{cases}\quad \rho\neq 0,$$

坐标变换公式的系数所成矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ 是非奇异的.

证 假设 $c^*=a^*+b^*$, $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$. 由于 $A,B,\bar{A},\bar{B}$ 共线,存在实数 a_{ij}, $i,j=1,2$,

$$a^*=a_{11}\bar{a}+a_{21}\bar{b},\ b^*=a_{12}\bar{a}+a_{22}\bar{b}.$$

因为 A,B 是相异两点, a^*,b^* 作为向量线性无关, a_{11},a_{21} 与 a_{12},a_{22} 不成比例, $|a_{ij}|\neq 0$, 即矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ 非奇异. 由射影坐标定义,点 $P(p)$ 的两种坐标系下坐标 (x_1,x_2), (x_1',x_2') 由下两式确定:

$$p=x_1a^*+x_2b^*,\ \rho'p=x_1'\bar{a}+x_2'\bar{b},\ \rho'\neq 0.$$

所以有

$$\begin{aligned}\rho'p &= \rho'x_1a^*+\rho'x_2b^*\\ &= \rho'(a_{11}x_1+a_{12}x_2)\bar{a}+\rho'(a_{21}x_1+a_{22}x_2)\bar{b},\end{aligned}$$

把它与 $\rho'p=x_1'\bar{a}+x_2'\bar{b}$ 比较得 (x_1,x_2) 与 (x_1',x_2') 的坐标变换公式:

$$\begin{cases}\rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,\end{cases}\quad \rho=\frac{1}{\rho'}\text{是非零常数}.$$

将 $x=(x_1,x_2)$ 与 $x'=(x_1',x_2')$ 看作列向量,则坐标变换公式可以简记为

$$\rho x'=Ax.$$

与熟悉的欧氏空间的坐标变换公式不同的地方之一是射影坐标变换公式中出现了非零常数 ρ,并且 ρ 随着新旧的坐标 x,x' 的不同选取而变化. ρ 的出现是由于射影坐标是齐次坐标,同一点的射影坐标可相差一个非零常数的因子. 坐标变换 $\rho x'=Ax$ 的矩阵 A 也可以相差一个非零常数的因子,它的逆变换为

$$\rho x = A^{-1} x',$$

其中 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$是 A 的伴随矩阵.上式也可写成

$$\rho x = \widetilde{A} x'.$$

例 3 设 A,B,C 是直线 ξ 上三点,ξ 上点在坐标系$\{A,B;C\}$与$\{C,A;B\}$下坐标分别是(x_1,x_2),(x_1',x_2').试求坐标变换公式.

解 法 1):点 A,B,C 在坐标系$\{A,B;C\}$与$\{C,A;B\}$下坐标分别是

$$(1,0),(0,1),(1,1) \quad 与 \quad (0,1),(1,1),(1,0).$$

设坐标变换公式是

$$\rho \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

以 A,B,C 的两种坐标分别代入得

$$\begin{cases} a_{11} = 0, \\ a_{21} = \rho_1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{12} = \rho_2, \\ a_{22} = \rho_2, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11} + a_{12} = \rho_3, \\ a_{21} + a_{22} = 0, \end{cases} \quad \rho_1\rho_2\rho_3 \neq 0.$$

采用不同的常数 ρ 是因为对于 3 个不同的点,常数也可能不同.解之得

$$a_{11} = 0, a_{12} = a_{22} = -a_{21}.$$

取 $a_{21} = -1$,这时 $\rho_1 = -1, \rho_2 = 1, \rho_3 = 1$,坐标变换公式是

$$\rho \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

如果点 P 在坐标系$\{A,B;C\}$下坐标是$(1,2)$,那么,以$(1,2)$代入上式的右边得知 P 在坐标系$\{C,A;B\}$下坐标是$(2,1)$.如果点 Q 在坐标系$\{C,A;B\}$下坐标是$(1,-1)$,那么由

$$\rho \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} 或 \rho \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

可得 Q 在坐标系$\{A,B;C\}$下坐标为(2,1).

法 2):设 $c^*=a^*+b^*$,则 $b^*=c^*-a^*$.记 $\bar{b}=b^*$,$\bar{c}=c^*$,$\bar{a}=-a^*$,则 $\bar{b}=\bar{c}+\bar{a}$.设 $P(x)$在坐标系$\{A,B;C\}$与$\{C,A;B\}$下坐标分别是(x_1,x_2),(x_1',x_2').则由坐标的定义

$$x=x_1a^*+x_2b^*,\ \rho x=x_1'\bar{c}+x_2'\bar{a}.$$

可得 $\rho x=-\rho x_1\bar{a}+\rho x_2(\bar{c}+\bar{a})=\rho x_2\bar{c}+(-\rho x_1+\rho x_2)\bar{a}$,因此

$$\rho^{-1}x_1'=x_2,\ \rho^{-1}x_2'=-x_1+x_2.$$

所得坐标变换公式与法 1)一样.

由例 3 我们知道,在坐标系$\{A,B;C\}$与$\{C,A;B\}$下坐标分别是(1,2),(2,1)的点表示直线 ξ 上同一点.由于射影坐标是齐次坐标,同一点的射影坐标可相差一个非零常数因子.(1,2)与(2,1)分别可以用与它们成比例的数组代替,如(2,4),(6,3),这时

$$\rho\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

中 $\rho=\dfrac{2}{3}$.又例如,在坐标系$\{A,B;C\}$与$\{C,A;B\}$下坐标分别是(1,1)与(1,-1)的点,由于不存在非零常数 ρ 使

$$\rho\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

成立,它们不是直线 ξ 上同一点在两个坐标系$\{A,B;C\}$和$\{C,A;B\}$下的坐标.它们表示直线 ξ 上两点.

1.3.3 二维射影坐标

下面定义并讨论射影平面上点的射影坐标.

引理 1.3.4 设 A,B,C,E 是射影平面上没有三点共线的四点,则可以取它们的解析表示使下式成立

$$e^*=a^*+b^*+c^*.$$

证 由于 A,B,C 的齐次坐标 a,b,c 满足$|a,b,c|\neq0$,因此 a,b,c 看作向量是线性无关的,所以存在 $\varepsilon_i\in\mathbf{R}$,$i=1,2,3$,使

$$e=\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c.$$

由条件 A,B,C,E 中无三点共线，$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\neq 0$. 取 $e^*=e, a^*=\varepsilon_1 a, b^*=\varepsilon_2 b, c^*=\varepsilon_3 c$. 则 $e^*=a^*+b^*+c^*$，引理得证.

对于射影平面上任一点 $P(x)$，存在实数 x_1,x_2,x_3 使

$$x=x_1 a^*+x_2 b^*+x_3 c^*.$$

三数组(x_1,x_2,x_3)称为点 P 在射影坐标系$\{A,B,C;E\}$下的坐标. 三点 A,B,C 是坐标系的基点，E 是单位点.

与一维射影坐标一样. 射影平面上的坐标也是齐次坐标，同一点的射影坐标可以相差一个非零常数的因子. 另外要注意(0,0,0)不是任一点的射影坐标. 平面上点的射影坐标的计算方法与一维射影坐标类似，坐标系基点 A,B,C 的坐标分别是(1,0,0)，(0,1,0)，(0,0,1)，单位点 E 的坐标是(1,1,1).

性质 1.3.5 设点 P 在射影平面上两个不同的坐标系下坐标分别是(x_1,x_2,x_3)与(x_1',x_2',x_3')，则有坐标变换公式：

$$\rho\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ \rho\neq 0,$$

也可以简写成：$\rho x'=Ax$，其中 $A=(a_{ij})$是坐标变换的系数矩阵，它非奇异.

证明与一维坐标变换类似，故略去. 它的逆变换是 $\rho x=A^{-1}x'$，具体计算时 A^{-1}可用 A 的伴随矩阵 $\tilde{A}=(A_{ij})^{\mathrm{T}}$ 代替，A_{ij}是 a_{ij} 在矩阵 A 中的代数余子式.

容易知道，§1.1 中拓广平面上由直角坐标决定的齐次坐标实质上也是射影坐标，坐标系的基点(0,0,1)是欧氏平面上直角坐标系的原点，(1,0,0)，(0,1,0)分别是 x 轴与 y 轴上的无穷远点，单位点(1,1,1)是普通点(1,1)，它决定了 x 轴与 y 轴上的单位点(1,0)与(0,1)，对应的齐次坐标是(1,0,1)与(0,1,1).

射影坐标变换 $\rho x'=Ax$ 相当于线性空间上的非奇线性变换，

这里多了一个非零常数 ρ. 与一维射影坐标变换一样，非零常数 ρ 也随点的坐标的改变而改变. 不难看出，射影直线在射影坐标下的表示式仍为一次齐次式. §1.2 中关于点与直线结合关系的结论与计算公式在射影坐标下仍然成立. 例如，如果点 P, Q 在射影坐标系 $\{A, B, C; E\}$ 下的坐标分别是 $p=(p_1, p_2, p_3)$, $q=(q_1, q_2, q_3)$, P, Q 的解析表示是

$$\bar{p}=p_1 a^*+p_2 b^*+p_3 c^* \text{ 与 } \bar{q}=q_1 a^*+q_2 b^*+q_3 c^*.$$

则 $\bar{r}=\lambda\bar{p}+\mu\bar{q}$ 决定的直线 PQ 上点 $R(\bar{r})$ 的坐标是

$$\lambda p+\mu q=(\lambda p_1+\mu q_1, \lambda p_2+\mu q_2, \lambda p_3+\mu q_3).$$

所以，如果 P, Q, R 在射影坐标系 $\{A, B, C; E\}$ 下的坐标分别是 p, q, r，则 P, Q, R 共线的充要条件还是 $|p, q, r|=0$.

如图 1-3-2，设 ABC 是坐标三点形，E 是单位点，由于点 A, B 的坐标分别是 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$，直线 AB 上的点都可以用 $(x_1, x_2, 0)$ 表示，它的方程是 $x_3=0$，线坐标是 $(0,0,1)$. 类似地，直线 BC 的方程是 $x_1=0$, AC 的方程是 $x_2=0$, CE 的方程是 $x_1-x_2=0$，所以 AB 与 CE 的交点 C' 的坐标是 $(1,1,0)$.

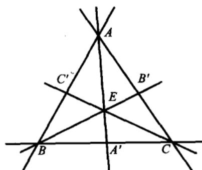


图 1-3-2

射影平面上点的射影坐标自然决定直线的射影坐标. 也可以用没有三条共点的四直线构成射影平面上的直线坐标系，用类似点坐标的计算方法去计算直线的射影坐标；而由直线的射影坐标反过来也可以决定点的射影坐标. 如图 1-3-2，直线 AB, BC, CA 在坐标系 $\{A, B, C; E\}$ 下的坐标分别是 $(0,0,1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$，它们构成一个线坐标系的坐标三线形. 从§1.2 习题 5 知道，三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 的三对对边交点

$$P=AB\times A'B',\ Q=BC\times B'C',\ R=CA\times C'A'$$

共线,设直线为 ζ,那里证明了 ζ 的线坐标是(1,1,1).因此由{A, B, C; E}决定的射影平面上线坐标系的基线是 BC, CA, AB,单位直线是 ζ.

例 4 设坐标变换把四点 A,B,C,D 的坐标(1,1,1),(1,0,1),(2,−1,1),(0,1,2)分别变为(2,2,2),(0,1,0),(−2,4,0),(3,1,−1),试求坐标变换公式.

解 法 1):设坐标变换是 $\rho x' = Ax$, $A = (a_{ij})$,分别把每个点的对应坐标代入,注意到不同坐标对对应的常数 ρ 可能不同,得

$$\begin{cases} a_{11}+a_{12}+a_{13}=2\rho_1, \\ a_{21}+a_{22}+a_{23}=2\rho_1, \\ a_{31}+a_{32}+a_{33}=2\rho_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}+a_{13}=0, \\ a_{21}+a_{23}=\rho_2, \\ a_{31}+a_{33}=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_{11}-a_{12}+a_{13}=-2\rho_3, \\ 2a_{21}-a_{22}+a_{23}=4\rho_3, \\ 2a_{31}-a_{32}+a_{33}=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{12}+2a_{13}=3\rho_4, \\ a_{22}+2a_{23}=\rho_4, \\ a_{32}+2a_{33}=-\rho_4. \end{cases}$$

首先决定 $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$,取含有 a_{11},a_{12},a_{13} 的方程,并把它们改写为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2\rho_1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2\rho_3 \\ 0 & 1 & 2 & -3\rho_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

由齐次线性方程组有非零解的条件知道,上面方程组的系数行列式等于 0,即

$$2\rho_1 - 4\rho_3 + 3\rho_4 = 0.$$

同理得 $2\rho_1 - 5\rho_2 + 8\rho_3 + \rho_4 = 0$, $2\rho_1 - \rho_4 = 0$.

取 $\rho_4 = 1$,解得 $\rho_1 = \dfrac{1}{2}$, $\rho_2 = 2$, $\rho_3 = 1$. 再解只含 a_{11},a_{12},a_{13} 的方程组得:

$$-a_{11} = a_{12} = a_{13} = 1.$$

同样可解得 $a_{22}=a_{33}=-1, a_{21}=a_{31}=a_{23}=a_{32}=1$. 所求坐标变换是

$$\rho\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

在上面计算中,$(2,2,2),(-2,4,0)$ 也可以分别用 $(1,1,1)$, $(1,-2,0)$ 代替. 通过计算此变换矩阵的代数余子式, 可得 $\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 $\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}$. 因此上式的逆变换公式是

$$\rho\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}.$$

法 2): 直线 AB 在两种坐标下的方程分别是

$$x_1-x_3=0,\ x_1'-x_3'=0.$$

所以对于射影平面上点 P, 它的坐标分别是 (x_1,x_2,x_3) 与 (x_1',x_2',x_3'), 存在非零数 ρ_1 使

$$\rho_1(x_1'-x_3')=x_1-x_3.$$

点 P 在直线 AB 上, 则两边都为零, 点 P 不在直线 AB 上, 两边都不为零. 自然 ρ_1 随点 P 以及 P 的坐标的改变而改变. 同理, 直线 AC 的两方程是 $2x_1+x_2-3x_3=0, 2x_1'+x_2'-3x_3'=0$. BC 的两方程是 $x_1+x_2-x_3=0, x_3'=0$. 因此存在非零常数使

$$\begin{cases}\rho_1(x_1'-x_3')=x_1-x_3,\\ \rho_2(2x_1'+x_2'-3x_3')=2x_1+x_2-3x_3,\\ \rho_3x_3'=x_1+x_2-x_3.\end{cases}$$

以点 D 的两坐标 $(0,1,2),(3,1,-1)$ 分别代入两边得:

$$4\rho_1=-2, 10\rho_2=-5, -\rho_3=-1.$$

所以 $\rho_1:\rho_2:\rho_3=1:1:-2$，取 $\rho_1=\rho,\rho_2=\rho,\rho_3=-2\rho$，代入化简可得

$$\begin{cases}\rho x_1'=\dfrac{1}{2}(x_1-x_2-x_3),\\\rho x_2'=\dfrac{1}{2}(-x_1+x_2-x_3),\\\rho x_3'=\dfrac{1}{2}(-x_1-x_2+x_3),\end{cases}$$

这与法 1)所得结果一样.

射影平面上的点在射影坐标系下用三数组 (x_1,x_2,x_3) 表示，x_1,x_2,x_3 不独立，可以相差一个非零常数的因子. 对于不在直线 $x_3=0$ 上的点，射影坐标是 (x_1,x_2,x_3) 的点也可用非齐次坐标 (x,y) 表示，其中 $x=\dfrac{x_1}{x_3},y=\dfrac{x_2}{x_3}$ 可取一切实数，数组 (x,y) 与射影平面上去掉直线 $x_3=0$ 上点以后剩下的部分是一一对应的. 同样道理，对于不在直线 $x_1=0$ 上的点 (x_1,x_2,x_3)，可以用 $(\bar{x},\bar{y})$ 表示，其中 $\bar{x}=\dfrac{x_2}{x_1},\bar{y}=\dfrac{x_3}{x_1}$. 类似可以定义直线 $x_2=0$ 以外点的非齐次坐标. 因此局部地，射影平面上的点都可用二维数组表示，正是由于这一点，我们称射影平面是二维的. 对于不在 $x_1=0$ 也不在 $x_3=0$ 上的点，上面定义了两个非齐次坐标 $(\bar{x},\bar{y})$ 与 (x,y). 同一点 P 的这两种非齐次坐标决定的射影坐标分别是 $(1,\bar{x},\bar{y})$ 与 $(x,y,1)$，它们应成比例，因此这两种非齐次坐标之间的关系是

$$x=\frac{1}{\bar{y}},y=\frac{\bar{x}}{\bar{y}},\ x\neq0,\bar{y}\neq0.$$

由于射影坐标系的选取有很大的随意性，利用这一特点可以解一些射影几何的问题.

例 5 已知两三点形 ABC 与 $A'B'C'$，如果直线 AA',BB',CC' 交于一点 O，直线 AB',BC',CA' 交于一点 O'，点 O,O' 不在两个三点形的任一边上. 证明 AC',BA',CB' 也交于一点.

证 取三点形 ABC 为坐标三点形，O 为单位点，它们的坐标分别是

$$A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1),O(1,1,1).$$

由于 A,A',O 共线，存在不为零的 s_1,t_1 使 $a'=s_1a+t_1o$，A' 的射影坐标是 (s_1+t_1,t_1,t_1). 同理得 $B'(t_2,s_2+t_2,t_2)$，$C'(t_3,t_3,s_3+t_3)$. 经计算得到直线 AB' 的线坐标 $(0,-t_2,s_2+t_2)$，BC' 的线坐标 $(s_3+t_3,0,-t_3)$，CA' 的线坐标 $(-t_1,s_1+t_1,0)$. 由假设三直线 AB',BC',CA' 交于一点 O'，

$$\begin{vmatrix} 0 & -t_2 & s_2+t_2 \\ s_3+t_3 & 0 & -t_3 \\ -t_1 & s_1+t_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-t_1t_2t_3+(s_1+t_1)(s_2+t_2)(s_3+t_3)=0.$$

另一方面，$AC'(0,s_3+t_3,-t_3)$，$BA'(-t_1,0,s_1+t_1)$，$CB'(s_2+t_2,-t_2,0)$，它们共点的充要条件是

$$\begin{vmatrix} 0 & s_3+t_3 & -t_3 \\ -t_1 & 0 & s_1+t_1 \\ s_2+t_2 & -t_2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

这恰是 AB',BC',CA' 交于一点的条件，因此 AC',BA',CB' 交于一点.

图 1－3－3 可以用以下方法作出：先任作三点形 ABC 以及不在此三点形边上的点 O,O'，使直线 OO' 也不过三点形 ABC 的任一顶点，利用题中点的共线条件可确定 A',B',C'.

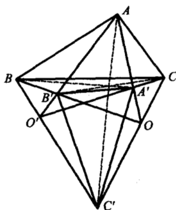


图 1－3－3

下面利用这一问题说明如何把射影几何结果应用于欧氏几何. 我们知道，拓广欧氏平面可作为射影平面的一个模型，所以例 5 也可以看成是拓广平

面上的几何问题.在同样的条件下,相应的结论也成立,下面是它的一些特殊情况.

(1)除 O'为无穷远点外,其余点均为普通点,这时 AB',BC',CA'互相平行,见图 1-3-4,由此得欧氏几何中命题:

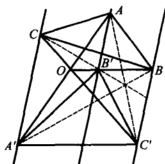


图 1-3-4

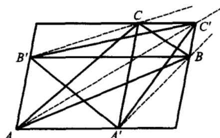


图 1-3-5

如果三角形 ABC 与 $A'B'C'$的对应顶点连线交于一点,而 AB',BC',CA'互相平行,则三直线 AC',BA',CB'也交于一点或互相平行.

(2)直线 OO'是无穷远直线,这时 AA',BB',CC'互相平行,AB',BC',CA'也互相平行.则三直线 AC',BA',CB'也交于一点或互相平行,见图 1-3-5.

这两种情况也能从一般情况通过中心射影得到,读者可以尝试利用平面几何的知识来证明这些结论.

习题 1.3

1. 证明四点 $A(1,-1,2)$,$B(3,2,1)$,$C(0,1,-1)$,$P(5,3,2)$共线,并求点 P 在坐标系$\{A,B;C\}$下的坐标.

2. 如果在上题中取$\{C,B;A\}$为直线 AB 上坐标系,求 P 的坐标并求两坐标之间的坐标变换公式.

3. 设四点 $A(1,-1,2)$,$B(3,2,1)$,C,$P(1,4,-3)$共线,点 P 在坐标系$\{A,B;,C\}$下的坐标是$(1,-1)$,求出 C.如果 $Q(q_1,q_2,q_3)$在坐标系$\{A,

$B;C\}$下的坐标是(1,2),求出 q_1,q_2,q_3.

4. 取 $A(1,2,1),B(1,1,0),C(2,1,1),E(0,1,7)$构成射影坐标系$\{A,B,C;E\}$,求点 $P(8,15,1)$的坐标. 如果点 $Q(q_1,q_2,q_3)$的坐标是$(1,1,-1)$,分别求出 q_1,q_2,q_3.

5. 设坐标系$\{A,B,C;E\}$与$\{A,B,C;F\}$的基点相同,单位点不同. 试求两坐标系之间的坐标变换公式.

6. 求坐标变换使四点的坐标 $P(1,2,1),Q(-1,1,1),R(2,-1,0),S(1,1,1)$分别变为 $P(1,0,0),Q(0,1,0),R(0,0,1),S(1,1,1)$,并求点 $A(1,0,1)$的新坐标.

7. 设射影平面上坐标变换 $\rho x'=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}x$,直线 $\xi:x_1+x_2+x_3=0$ 与 $\eta:x_1'+x_2'+x_3'=0$ 分别是直线 ξ,η 在原来坐标系及新坐标系下的方程,试分别求出 ξ,η 在另一坐标系下的方程.

8. 设直线 ξ 在射影坐标下的方程是 $x_3=0$,证明存在直线 ξ 上射影坐标系,使 $P(x_1,x_2,0)$的射影坐标是(x_1,x_2).

§1.4 Desargues 定理与对偶原理

1.4.1 Desargues 定理

下面我们叙述并证明平面射影几何的一个重要定理. 如果两个三点形的顶点有一个对应关系,对应顶点的连线叫这两个三点形的对应边.

定理 1.4.1(Desargues) 如果两个三点形对应顶点的连线交于一点,那么这两个三点形三对对应边的交点共线.

证 设三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 的对应顶点连线 AA',BB',CC'交于点 S,要证三对对应边交点

$$P=BC\times B'C',Q=AC\times A'C',R=AB\times A'B'$$

在一条直线上. 下面对 A,B,C,A',B',C',S 七点相异的情况给

出证明，其他情况容易验证.

由于 A, A', S 相异，存在它们的解析表示使 $s = a^* + a'^*$，同理有

$$s = b^* + b'^* = c^* + c'^*.$$

由此可得

$$b^* - c^* = -b'^* + c'^*,$$

此等式左边表示直线 BC 上点，右边是 $B'C'$ 上点，所以它是 $P = BC \times B'C'$ 的解析表示 p^*. 同理可得 Q, R 的解析表示

$$q^* = c^* - a^* = -c'^* + a'^*,\quad r^* = a^* - b^* = -a'^* + b'^*.$$

从等式 $p^* + q^* + r^* = 0$ 知道三点 P, Q, R 共线.

Desargues 定理也可以通过选取射影坐标系或者通过空间的 Desargues 定理证明. Desargues 定理有广泛的应用，使用时应注意对应顶点与对应边的写法，否则容易出错. 另外，要注意共线三点不构成三点形，不能使用 Desargues 定理. 该定理的逆定理是

定理 1.4.2 若两三点形的三对对应边交点共线，则其对应顶点的连线共点.

证 如图 1-4-1，三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 的对应边交点 P, Q, R 共线，要证明 AA', BB', CC' 交于一点. 考虑三点形 AQA' 与 BPB'，它们的对应顶点连线 $AB, QP, A'B'$ 交于 R. 由 Desargues

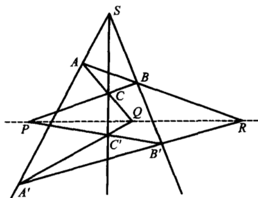


图 1-4-1

定理,此两三点形的对应边交点

$$AQ \times BP = C, QA' \times PB' = C', AA' \times BB' = S$$

共线,即两三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 的对应顶点连线交于一点.

Desargues 定理及其逆定理都称为 Desargues 定理,我们称图 1-4-1中两三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 成透视,S 叫透视中心,对应边交点所在直线 PQ 叫透视轴.这样上面两定理也可以叙述成:

两个顶点有对应关系的三点形成透视的充要条件是它们有透视轴.

Desargues 定理的图形包含 10 个点,10 条直线,其中有些点是容许重合的,它们成为 Desargues 定理的特殊情形.一般情况下,每条直线上有三点,过每点有三条直线,这个图形叫作 Desargues 构形.从这个构形中可以形成多对成透视的三点形.可以证明此图形中的 10 个点中的每一个都可作为某些点构成的三点形的透视中心.例如,A 是三点形 SBC 与 $A'RQ$ 的透视中心,相应的透视轴是 P, C', B' 所在直线.

例 1 如图 1-4-2,设点 O 是不在三点形 ABC 三边上的点,$D = AO \times BC$, $E = BO \times AC$, $F = CO \times AB$.则三点形 ABC 与 DEF 关于 O 成透视.由 Desargues 定理,它们的对应边交点 $AB \times DE$, $BC \times EF$, $AC \times DF$ 共线.

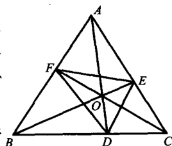


图 1-4-2

运用到欧氏几何,O 可以是三角形 ABC 的重心,垂心或外心等.它有一些有趣的特例:

如果 AB 与 DE 平行,那么另外两对边的交点 $BC \times EF$, $AC \times DF$ 的连线也与它们平行,如果 AB 与 DE 平行,BC 与 EF 平行,则 AC 与 DF 也平行.

例 2 证明欧氏平面上三角形的重心,垂心与外心共线,所在直线叫三角形的 **Euler** 线.

证 如图 1－4－3，设欧氏平面上三角形 ABC 的重心，垂心与外心分别是 M,H,O；D,E,F 分别是三边 BC,CA,AB 的中点．三点形 ABH 与 DEO 的对应边都平行，在拓广平面上它们的交点共线．由 Desargues 定理，它们的对应顶点连线 AD,BE,HO 交于一点，即三角形 ABC 的重心，垂心与外心共线．

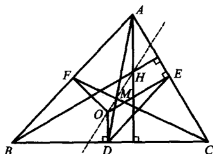


图 1－4－3

1.4.2 平面射影几何的对偶原理

点与直线是射影平面上的基本元素，平面射影几何主要研究点与直线以及它们的相互关系，统称为结合关系．在一个仅涉及点与直线以及它们的结合关系的命题中，把点改成直线，直线改成点，结合关系也作相应的改变．例如，两点连线中点改成直线，直线改成点得到：两直线交点；又例如，三点共线改成三直线共点．这样改变以后得到一个新的射影几何命题，称为原命题的**对偶命题**．下面是一些互为对偶的命题：

(1) 两点决定一直线，即过两不同点有且只有一条直线；

(1)′ 两直线有且只有一个交点．

(2) 由不共线的三点及它们的两两连线构成的图形叫三点形；

(2)′ 由不交于一点的三直线及它们的两两交点构成的图形叫三线形．

(3) 射影坐标下,三点 A,B,C 共线的充要条件是 $|a,b,c|=0$,

(3)′ 射影坐标下,三直线 ξ,η,ζ 共点的充要条件是 $|\xi,\eta,\zeta|=0$.

(4) 如果两个三点形的对应顶点连线交于一点,则它们的对应边交点共线;

(4)′ 如果两个三线形的对应边交点共线,则它们的对应顶点连线共点.

(5) 四点中总有三点共线(不成立);

(5)′ 四直线中总有三直线共点(不成立).

从上面可以看出,如果一个射影几何的关于点,直线以及它们的结合关系的命题是真实的,它的对偶命题也是真实的.对偶命题是相互的,即如果命题 B 是 A 的对偶命题,那么 A 也是 B 的对偶命题.上述对偶命题中(4)是 Desargues 定理,而(4)′实际上是它的逆定理.

在射影几何的对偶中,点与直线是最基本的对偶元素,"点在直线上"与"直线过点"是最基本的对偶关系.

对偶原理 在平面射影几何里,如果一个关于点和直线的结合关系的命题成立,则它的对偶命题也成立.

射影几何可以用公理法来定义并讨论,对偶原理也可用公理法证明.在第三章§3.2 中我们将定义一种射影映射——对射,它把点变成直线,直线变成点,而点与直线的结合关系仍能保持,利用对射可以证明对偶原理,在§3.2 将给出进一步的说明.读者可从§1.1 与§1.2 的有关点与直线结合关系的坐标下计算法则体会到对偶原理的正确性.在射影坐标下,计算两点连线与两直线交点的方法、判断三点共线与三线共点的方法都是一样的,只要把点与直线的坐标互换.下面利用对偶的方法给出 Desargues 定理的对偶定理的证明,读者从中可以体会到一般情况.

例 3 如果两个三线形的对应边的交点共线,那么这两三线

形的对应顶点连线交于一点.

证 设三线形 $\xi\eta\zeta$ 与 $\xi'\eta'\zeta'$ 的对应边交点共线于 α，仍对 $\xi,\eta,\zeta,\xi',\eta',\zeta'$ 均相异情况证明.由于 ξ,ξ',α 三直线交于一点，在射影坐标下，取 ξ,ξ',α 的齐次坐标使

$$\alpha^* = \xi^* + \xi'^*,$$

同理可得 $\alpha^* = \eta^* + \eta'^*$，$\alpha^* = \zeta^* + \zeta'^*$. 因此 $\xi^* - \zeta^* = -\xi'^* + \zeta'^*$，它左边表示过点 $A = \xi \times \zeta$ 的直线，右边表示过点 $A' = \xi' \times \zeta'$ 的直线.所以 $\xi^* - \zeta^* = -\xi'^* + \zeta'^*$ 是直线 AA' 的齐次坐标.同理 $\zeta^* - \eta^* = -\zeta'^* + \eta'^*$ 是过 $C = \zeta \times \eta$ 与 $C' = \zeta' \times \eta'$ 的直线，$\eta^* - \xi^* = -\eta'^* + \xi'^*$ 是过 $B = \xi \times \eta$ 与 $B' = \xi' \times \eta'$ 的直线，由

$$(\xi^* - \zeta^*) + (\zeta^* - \eta^*) + (\eta^* - \xi^*) = 0,$$

得知直线 AA'，BB'，CC' 交于一点.

对偶原理的发现是射影几何的重大进展.它给射影几何的研究带来极大的方便，一旦我们证明了一个点与直线的结合关系的命题后，它的对偶命题自然成立.以后对于互为对偶的命题常常只写出一个，另一个可以按照对偶法则自己写出.

对偶原理仅在射影几何中成立，在欧氏几何中并不成立.例如两点连一线与两直线交于一点在射影几何里互为对偶，都是成立的.但在欧氏几何中两直线交于一点不成立(平行直线不相交).另外，两点之间距离，两直线的夹角等度量性质都是欧氏几何研究的内容，它们都无对偶可言.

反映互为对偶的命题的图形叫*对偶图形*.如点列的对偶图形是线束；三点形的对偶图形是三线形.

我们来画图 1-4-4(a)的对偶图形，它可用如下命题表示：在直线 ξ_1 上有两点 A_1, A_2，过点 A_1 另有直线 ξ_2，过点 A_2 还有直线 ξ_3, ξ_4.其对偶命题是：过一点 A_1 有两直线 ξ_1, ξ_2，在直线 ξ_1 上还有点 A_2，在直线 ξ_2 上还有点 A_3, A_4.由此可以画出图 1-4-4(a)的对偶图形 1-4-4(b).下面再定义一对对偶图形，它们也是射影几何的基本图形.

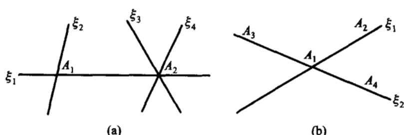


图 1－4－4

定义 1.4.1 射影平面上无三点共线的四点构成的图形叫**完全四点形**，给定的四点是四点形的顶点，每两顶点的连线为边. 通过不同的顶点的两条边称为一对对边，对边的交点为**对角点**. 三个对角点组成完全四点形的**对角三点形**.

如图 1－4－5(a)，$ABCD$ 是完全四点形，AB 与 CD，AD 与 BC，AC 与 BD 是它的三对对边，它们的交点构成对角三点形 EFG.

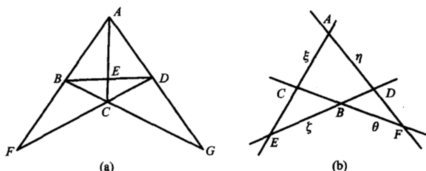


图 1－4－5

对偶地有

定义 1.4.2 射影平面上无三条共点的四直线构成的图形叫**完全四线形**，每条直线为边，每两边的交点叫顶点. 由不同的边相交的两顶点称为一对对顶点，对顶点的连线是**对角线**，三条对角线组成的图形叫**对角三线形**.

如图 1－4－5(b)，$\xi\eta\zeta\theta$ 是完全四线形，$A,B;C,D;E,F$ 是它的三对对顶点，AB,CD,EF 构成完全四线形的对角三线形.

在§1.3,我们曾证明了如下的命题:

(1) 如果两个三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 成透视，三点形 ABC 与 $B'C'A'$ 也成透视，则三点形 ABC 与 $C'A'B'$ 也成透视.

它的对偶命题是

(1)′ 如果两个三线形 $\xi\eta\zeta$ 与 $\xi'\eta'\zeta'$ 成透视，三线形 $\xi\eta\zeta$ 与 $\eta'\zeta'\xi'$ 也成透视，则三线形 $\xi\eta\zeta$ 与 $\zeta'\xi'\eta'$ 成透视.

命题(1)的图形是图 1－4－6(a)，O 是三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 的透视中心，O' 是三点形 ABC 与 $B'C'A'$ 的透视中心，利用作出图 1－4－6(a)的方法可作出命题(1)′的图形.图 1－4－6(b)中 α,α' 分别是三线形 $\xi\eta\zeta$ 与 $\xi'\eta'\zeta'$，$\xi\eta\zeta$ 与 $\eta'\zeta'\xi'$ 的透视轴，而 P,Q,R 是三线形 $\xi\eta\zeta$ 与 $\zeta'\xi'\eta'$ 的对应边的交点.图形 1－4－6(a)与 1－4－6(b)互为对偶图形.

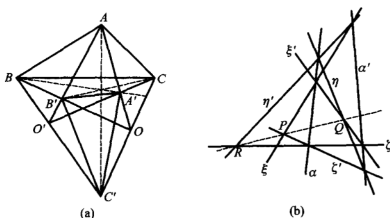


图 1－4－6

如果把图 1－4－6(a)中三点形 ABC 与 $A'B'C'$，ABC 与 $B'C'A'$ 的透视轴 α,α' 画出，把图 1－4－6(b)中三线形 $\xi\eta\zeta$ 与 $\xi'\eta'\zeta'$，$\xi\eta\zeta$ 与 $\eta'\zeta'\xi'$ 的透视中心 O,O' 也画出.由于三点形与三线形互为对偶图形，因此图 1－4－6(a)与图 1－4－6(b)在画出所有的透视轴与

透视中心以后，两图形实质上是一致的.

对偶原理可以推广到高维射影几何中，下面以三维射影空间为例作一些说明. 以拓广空间为模型建立三维射影空间，记为 P^3，其上的点也可用齐次坐标(x_1,x_2,x_3,x_4)表示，x_1,x_2,x_3,x_4 不全为 0. 一次齐次方程

$$\pi:\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3+\xi_4x_4=0,\ \xi_1,\cdots,\xi_4\ \text{不全为}\ 0$$

定义的 P^3 中图形叫射影空间中的射影平面. P^3 中任两射影平面相交，交于一条射影直线，射影直线用

$$\begin{cases}\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3+\xi_4x_4=0,\\ \eta_1x_1+\eta_2x_2+\eta_3x_3+\eta_4x_4=0\end{cases}$$

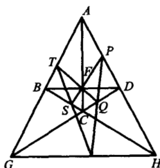
表示，其中 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 与 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 不成比例. 在射影空间中任两直线不一定相交. 在三维射影空间 P^3 中基本的对偶图形是点与平面，共面的点对应于共点的面. 两平面的交线对应于两点的连线，因此在 P^3 的对偶中直线对应于直线. 在三维射影几何中对偶原理仍然成立.

习题 1.4

1. 如图，设 FGH 是完全四点形 $ABCD$ 的对角三点形，过 F 的两直线分别交 AB,BC,CD,DA 于 T,S,Q,P. 求证，点 $TS\times PQ$ 与 $TP\times SQ$ 均在直线 GH 上.

2. 设 FGH 是完全四点形 $ABCD$ 的对角三点形，即 $F=AC\times BD$，$G=AB\times CD$，$H=AD\times BC$. 试证三点 $L=BC\times FG$，$M=AC\times GH$，$N=AB\times FH$ 共线.

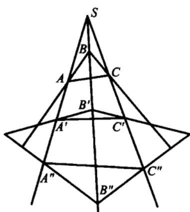
3. 如果三点形 ABC，$A'B'C'$，$A''B''C''$两两成透视对应，且有共同的透视中心，则三透视轴交于一点.



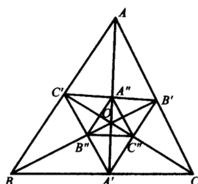
习题 1

4. 写出上题的对偶命题.

5. 设 O 是不在三点形ABC 三边上点，如图得 A',B',C',A'',B'',C''. 三点形 ABC，$A'B'C'$，$A''B''C''$两两成透视，试证它们的透视轴重合.



习题 3



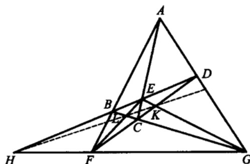
习题 5

6. 设直线 AB, CD 交于 U, 直线 AC, BD 交于 V, 而 $F = UV \times AD$, $G = UV \times BC$, $E = AC \times BF$. 试证三直线 AB, CF, GE 共点.

7. 如图, EFG 是完全四点形 $ABCD$ 的对角三点形, 则 $H = FG \times BD$, $L = EF \times BG$, $K = EG \times DF$ 三点共线.

按照下列条件把它分别写成欧氏几何中命题并作图:

(1) $ABCD$ 是平行四边形; (2) $GDBF$ 是平行四边形; (3) $BDGF$ 是梯形, BD 与 FG 平行; (4) $CEDG$ 是梯形, CE 与 GD 平行.



习题 7

8. 利用 Desargues 定理证明下列欧氏几何中命题:

(1) 设平行四边形 $EFGH$ 的顶点在另一平行四边形 $ABCD$ 上, 则这两平行四边形的对角线交于一点;

(2) 设 E,F,G,H 分别是四边形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 上点，如果 BD,EH 和 FG 平行，则 AC,EF 和 HG 也平行或交于一点.

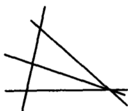
9. 写出下列命题的对偶命题：

(1) 射影平面上至少存在四条直线，其中任何三条直线不共点；

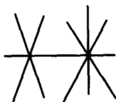
(2) 设一个变动的三点形，它的两边各通过一个定点，而三个顶点分别在共点的三条直线上，则第三边也通过一个定点；

(3) 设 $A,B,C;A',B',C'$ 分别是共线三点，如果 BC' 与 $B'C$ 交于 L，CA' 与 $C'A$ 交于 M，AB' 与 $A'B$ 交于 N，则 L,M,N 共线(Pappus 定理).

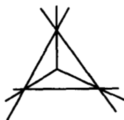
10. 画出下列图形的对偶图形.



(1)



(2)



(3)

11. 已知两直线 ξ,η 及不在此两直线上的点 P，不延长 ξ,η 而作出过 P 与 $\xi\times\eta$ 的直线.

12. 已知平面上三点形 ABC，共线三点 P,Q,R，求作三点形 XYZ 使它的三个顶点分别在三点形 ABC 的三边上，它的三边分别过 P,Q,R.

13. 写出上题的对偶命题，并给出作法.

14. 设 ξ,η,ζ,θ 是平面内四直线，试在虚线之内的区域作出过点 $\xi\times\zeta$ 与 $\eta\times\theta$ 的直线.

15. 设 $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$ 是完全四线形，AB,CD,EF 是它的对角三线形. 以 AB,CD,EF 为坐标三线形，证明适当选取单位点可以将直线 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 的方程表示成

$$x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0.$$

并找出单位点.

习题 14

习题 15

§1.5 交　　比

1.5.1 交比的定义与性质

下面介绍射影几何的一个重要的量——交比.

定义 1.5.1 设 A,B,C,D 是共线的相异四点,如果在射影坐标下 $c=\lambda_1 a+\lambda_2 b, d=\mu_1 a+\mu_2 b$,称 $R(AB,CD)=\frac{\mu_1}{\mu_2}:\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2}$是四点 A,B,C,D 的交比.

容易验证这样定义的数与 A,B,C,D 的坐标取法无关.例如.如果 $a^*=\rho a,\rho\neq 0$,这时 $c=\frac{1}{\rho}\lambda_1 a^*+\lambda_2 b, d=\frac{1}{\rho}\mu_1 a^*+\mu_2 b$,则

$$R(AB,CD)=\frac{\frac{1}{\rho}\mu_1}{\mu_2}:\frac{\frac{1}{\rho}\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2}.$$

其他情况类似验证.也可以证明交比与射影坐标的取法无关,设 $\rho x'=Ax$ 是坐标变换,A,B,C,D 的新坐标分别是 $a'=Aa, b'=Ab, c'=Ac, d'=Ad$,易见,

$$c' = \lambda_1 a' + \lambda_2 b', \ d' = \mu_1 a' + \mu_2 b'$$

也成立.因此,交比与射影坐标的取法无关.

例 1 已知四点 $A(1,0,1)$,$B(1,-1,2)$,$C(3,-1,4)$,$D(0,1,-1)$,不难算得

$$c = 2a + b, \ d = a - b,$$

这也说明了 A,B,C,D 共线,它们的交比 $R(AB,CD) = -\frac{1}{2}$.

显然交比 $R(AB,CD)$ 与四点的顺序有关,下面的定理说明了交比与四点顺序的关系.

定理 1.5.1 设共线四点 A,B,C,D 的交比是 $R(AB,CD) = \lambda$,则

(i) 交换前后两对点,或每对点同时交换,交比不变,即

$$R(AB,CD) = R(CD,AB) = R(BA,DC) = \lambda;$$

(ii) 前后两对点中只有一对点交换,交比变成倒数,即

$$R(AB,DC) = R(BA,CD) = \frac{1}{\lambda};$$

(iii) 交换中间两点,与原交比之和为 1,即

$$R(AC,BD) = 1 - \lambda.$$

证 下面证明(iii),其他情况类似可证,设

$$c = \lambda_1 a + \lambda_2 b, \ d = \mu_1 a + \mu_2 b, \ 则\ \lambda = \frac{\lambda_2 \mu_1}{\lambda_1 \mu_2}.$$

由上式可得

$$b = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} a + \frac{1}{\lambda_2} c, \ d = \mu_1 a + \mu_2 \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} a + \frac{1}{\lambda_2} c \right)$$

$$= \left(\mu_1 - \frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_2} \right) a + \frac{\mu_2}{\lambda_2} c.$$

因此 $R(AC,BD) = -\frac{\lambda_2 \mu_1}{\lambda_1 \mu_2} + 1 = 1 - \lambda$,证明中用到 $\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 \neq 0$.

共线四点 A,B,C,D 的不同排列共有 24 种,但根据上面的

定理,其中有些交比值是相同的.实际上不同的交比值最多六个,下面列出这些交比的关系供查考:

(1) $R(AB,CD)=R(CD,AB)=R(BA,DC)=R(DC,BA)=\lambda$;

(2) $R(AB,DC)=R(DC,AB)=R(BA,CD)=R(CD,BA)=\dfrac{1}{\lambda}$;

(3) $R(AC,BD)=R(BD,AC)=R(CA,DB)=R(DB,CA)=1-\lambda$;

(4) $R(AC,DB)=R(BD,CA)=R(CA,BD)=R(DB,AC)=\dfrac{1}{1-\lambda}$;

(5) $R(AD,BC)=R(DA,CB)=R(BC,AD)=R(CB,DA)=1-\dfrac{1}{\lambda}$;

(6) $R(AD,CB)=R(DA,BC)=R(BC,DA)=R(CB,AD)=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$.

由于 A,B,C,D 是相异四点,$\lambda\neq 0,1,\infty$.实际上,如果 $\lambda=0$,则 $\lambda_2\mu_1$ 中有一数为 0,不妨设 $\lambda_2=0$,则 $c=\lambda_1 a$,A 与 C 重合;如果 $\lambda=1$,则 $\lambda_1:\lambda_2=\mu_1:\mu_2$,$C$ 与 D 重合,都与假设矛盾.类似地,$\lambda\neq\infty$.另一方面,不难知道对任意共线的相异三点 A,B,C,实数 λ,存在唯一的点 D,使 $R(AB,CD)=\lambda$.

同样可以定义线束中的四直线的交比.

定义 1.5.2 设 η,ζ,ϕ,ψ 是共点四条相异直线,射影坐标下,$\phi=\lambda_1\eta+\lambda_2\zeta$,$\psi=\mu_1\eta+\mu_2\zeta$,则 $R(\eta\zeta,\phi\psi)=\dfrac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2}$是此四直线的交比.

定理 1.5.2 中性质对线束中直线的交比也成立,下面讨论直线与线束这两种交比的关系,为此先给出

定义 1.5.3 设线束 S 中直线 $\xi,\eta,\zeta,\cdots$ 与不过 S 的直线 α 分别交于 $P,Q,R,\cdots$，这样给出的点列 α 上点与线束 S 中直线的对应叫透视对应，记为 $\alpha(P,Q,R,\cdots)\,\overline{\wedge}\,S(\xi,\eta,\zeta,\cdots)$（图 1-5-1）.

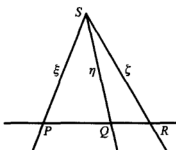


图 1-5-1

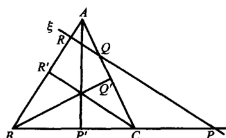


图 1-5-2

显然，透视是点列与线束之间的一一对应. 定义中透视的逆映射是线束 S 与点列 α 之间的对应，也叫透视，记为 $S(\xi,\eta,\zeta,\cdots)\,\overline{\wedge}\,\alpha(P,Q,R,\cdots)$.

性质 1.5.3 如果 $\xi(A,B,C,D,\cdots)\,\overline{\wedge}\,S(\eta,\zeta,\phi,\psi\cdots)$，则

$$R(AB,CD)=R(\eta\zeta,\phi\psi),$$

也就是说透视对应保持交比不变.

证 假设在射影坐标下，$c=\lambda_1 a+\lambda_2 b$，$d=\mu_1 a+\mu_2 b$，则 $R(AB,CD)=\dfrac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2}$. 利用射影平面上点坐标与直线坐标的关系，可假设直线 $\eta=SA,\zeta=SB,\phi=SC,\psi=SD$ 的射影坐标仍然满足

$$\phi=\lambda_1\eta+\lambda_2\zeta,\ \psi=\mu_1\eta+\mu_2\zeta.$$

于是 $R(\eta\zeta,\phi\psi)=\dfrac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2}=R(AB,CD)$.

例 2 如图 1-5-2，设直线 ξ 交三点形 ABC 的三边 BC，CA，AB 分别于 P,Q,R，设 P',Q',R' 也分别是 BC,CA,AB 上三点. 试证 AP',BQ',CR' 交于一点的充要条件是

$$R(BC,P'P)R(CA,Q'Q)R(AB,R'R)=-1.$$

证 选取射影坐标系使 $A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)$,由共线关系,可设其他点的坐标是 $P(0,\lambda_1,\mu_1),P'(0,\lambda_1',\mu_1')$,$Q(\lambda_2,0,\mu_2),Q'(\lambda_2',0,\mu_2'),R(\lambda_3,\mu_3,0),R'(\lambda_3',\mu_3',0)$.由于 P,Q,R 共线,

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & 0 & \mu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1\mu_2\lambda_3 + \mu_1\lambda_2\mu_3 = 0.$$

不难算得,这时

$$R(BC,P'P)R(CA,Q'Q)R(AB,R'R)$$
$$= \frac{\lambda_1\mu_1'}{\mu_1\lambda_1'}\cdot\frac{\mu_2\lambda_2'}{\lambda_2\mu_2'}\cdot\frac{\lambda_3\mu_3'}{\mu_3\lambda_3'} = -\frac{\mu_1'\lambda_2'\mu_3'}{\lambda_1'\mu_2'\lambda_3'}.$$

另一方面 $AP'(0,\mu_1',-\lambda_1'),BQ'(\mu_2',0,-\lambda_2'),CR'(\mu_3',-\lambda_3',0)$,它们交于一点的充要条件是

$$\begin{vmatrix} 0 & \mu_1' & -\lambda_1' \\ \mu_2' & 0 & -\lambda_2' \\ \mu_3' & -\lambda_3' & 0 \end{vmatrix} = -\mu_1'\lambda_2'\mu_3' + \lambda_1'\mu_2'\lambda_3' = 0,$$

即 $-\dfrac{\mu_1'\lambda_2'\mu_3'}{\lambda_1'\mu_2'\lambda_3'} = -1$.

1.5.2 交比与一维射影坐标

如果$\{A,B;C\}$是直线 ξ 上射影坐标,设 ξ 上点 P 的射影坐标是(x_1,x_2),$c^* = a^* + b^*$,$p = x_1a^* + x_2b^*$,$R(AB,CP) = \dfrac{x_1}{x_2}$.根据这一性质,可以利用交比计算 P 的射影坐标.如果 $R(AB,CP)=\lambda$,则 P 在坐标系$\{A,B;C\}$下坐标是$(\lambda,1)$.如果 $\lambda=\infty$则 $x_2=0$,这时 $P=A$.反过来射影坐标也可以用来计算交比.

性质 1.5.4 设在直线 ξ 的射影坐标下,四点 P,Q,R,S 的

坐标分别是$(p_1,p_2),(q_1,q_2),(r_1,r_2),(s_1,s_2)$,则

$$R(PQ,RS)=\frac{|p\ r|\cdot|q\ s|}{|q\ r|\cdot|p\ s|},$$

其中$|pr|=\begin{vmatrix}p_1 & r_1\\ p_2 & r_2\end{vmatrix}$,其余类似.

证 设ξ上坐标系是$\{A,B;C\}$,$c^*=a^*+b^*$,以$\bar{p},\bar{q},\bar{r},\bar{s}$表示$P,Q,R,S$的平面射影坐标,则$\bar{p}=p_1a^*+p_2b^*$,$\bar{q}=q_1a^*+q_2b^*$,$\bar{r}=r_1a^*+r_2b^*$,$\bar{s}=s_1a^*+s_2b^*$.从前两式可解出$a^*,b^*$,记$\delta=|pq|=\begin{vmatrix}p_1 & q_1\\ p_2 & q_2\end{vmatrix}$,

$$a^*=\frac{q_2}{\delta}\bar{p}-\frac{p_2}{\delta}\bar{q},\ b^*=-\frac{q_1}{\delta}\bar{p}+\frac{p_1}{\delta}\bar{q}.$$

因此

$$\begin{aligned}\bar{r}&=\frac{1}{\delta}(r_1q_2-r_2q_1)\bar{p}+\frac{1}{\delta}(-r_1p_2+r_2p_1)\bar{q}\\&=\frac{1}{\delta}|rq|\bar{p}+\frac{1}{\delta}|pr|\bar{q},\\ \bar{s}&=\frac{1}{\delta}(s_1q_2-s_2q_1)\bar{p}+\frac{1}{\delta}(-s_1p_2+s_2p_1)\bar{q}\\&=\frac{1}{\delta}|sq|\bar{p}+\frac{1}{\delta}|ps|\bar{q}.\end{aligned}$$

从交比定义得

$$R(PQ,RS)=\frac{|s\ q|\cdot|p\ r|}{|p\ s|\cdot|r\ q|}=\frac{|p\ r|\cdot|q\ s|}{|q\ r|\cdot|p\ s|}.$$

对偶地,共点四直线的交比与线束中直线的射影坐标也有类似的关系.

利用性质 1.5.3 中公式可将交比推广到四点(或四直线)中有重合的情况.如果A,B,C,D中有两点重合,则由$R(AB,CD)=\frac{|a\ c|\cdot|b\ d|}{|b\ c|\cdot|a\ d|}$知道,交比仍可计算(如果出现$\frac{1}{0}$,记为$\infty$),这时交

比值是 0,1,∞三个数中的一个.例如,如果 A,B,C 为共线相异三点,则 $R(AA,BC)=R(BC,AA)=1$, $R(AB,AC)=0$, $R(AB,CA)=\infty$.容易验证,定理 1.5.1 可以推广到这种四点中有两点相同的情况.

推论 1.5.5 如果 A,B,C,P,Q 是共线的点,其中 A,B,C 是相异三点,且 $R(AB,CP)=R(AB,CQ)$,则 $P=Q$.

例 3 设坐标变换把直线 ξ 上三点 A,B,C 的坐标分别从(1,0),(1,-1),(2,1)变为(1,2),(1,3),(2,3),试求坐标变换公式.

解 设 P 是 ξ 上任一点,P 在两坐标系下坐标分别是(x_1,x_2),(x'_1,x'_2),由性质 1.5.3,

$$R(AB,CP)=\frac{\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&x_1\\-1&x_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2\\-1&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&x_1\\0&x_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&x'_1\\3&x'_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2\\3&3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&x'_1\\2&x'_2\end{vmatrix}}.$$

化简得

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x'_1}{2x'_1-x'_2},$$

因此坐标变换公式是

$$\begin{cases}\rho x_1=x'_1,\\ \rho x_2=2x'_1-x'_2,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}\rho x'_1=x_1,\\ \rho x'_2=2x_1-x_2.\end{cases}$$

1.5.3 调和点列

如果四点 A,B,C,D 的交比 $R(AB,CD)=-1$,那么称 A,B,C,D 是*调和点列*,或称 C,D 调和分割 A,B,也称 D 是 A,B,C 的**第四调和点**.下面给出第四调和点的作法.

设 A,B,C 是共线相异三点,S 是直线外一点,在 SC 上任取一点 O,记 $E=AO\times SB$, $F=BO\times SA$,则 $D=EF\times AB$ 是 A,B,C 的第四调和点.证明如下,

从作法知道,S,A,B,O 是无三点共线的四点,可取作坐标

系的基点与单位点，$S(1,0,0)$，$A(0,1,0)$，$B(0,0,1)$，$O(1,1,1)$．经过简单计算可得 $C(0,1,1)$，$D(0,1,-1)$，因此 $c=a+b$，$d=a-b$，$R(AB,CD)=-1$，所以 A,B,C,D 是调和点列．

A,B,C,D 的调和性也可以利用性质 1.5.2，点列与线束之间的透视保持交比来证明．从

$$AB(A,B,C,D,\cdots)\barwedge S(SA,SB,SC,SD,\cdots)$$
$$\barwedge EF(F,E,U,D,\cdots)$$

可得 $R(AB,CD)=R(FE,UD)$．考虑线束 O 分别与直线 AB，EF 的透视可得：

$$AB(A,B,C,D,\cdots)\barwedge O(OA,OB,OC,OD,\cdots)$$
$$\barwedge EF(E,F,U,D,\cdots),$$

因此 $R(AB,CD)=R(EF,UD)$．从 $R(FE,UD)=1/R(EF,UD)$ 可得 $R(AB,CD)^2=1$．由于 A,B,C,D 是相异四点，$R(AB,CD)\neq 1$，所以

$$R(AB,CD)=-1.$$

如图 1-5-3，点 C,D 调和分割 A,B，两点 C,D 分别在直线 AB 上由 A,B 所分成的两线段内．从交比性质知道，$R(CD,AB)=R(AB,DC)=-1$，因此 A,B,C,D 按照不同的顺序 C,D,A,B 或 A,B,D,C 都是调和点列．从定理 1.5.1 可知，如果共线四点的交比是 $2,\frac{1}{2},-1$，则此四点按照一定的顺序是调和点列．如图 1-5-3，完全四点形 $SFOE$ 内有许多调和点列，如 E,F,U,D；S,O,U,C 等．

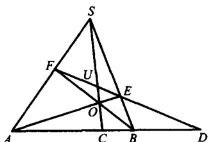


图 1-5-3

对于线束中四直线也可以定义调和线束，从第四调和点的作法，可得到第四调和直线的作法，不再重复．如图 1-5-3，四直线 SA,SB,SC,SD 与 OA,OB,OC,OD 都是调和直线．

例 4 设 S 是直线 ξ,η 外一点，过 S 任作两直线交 ξ,η 分别于 X,Y,X',Y'（见图 1－5－4），记 $Z=XY'\times X'Y$. 试证 Z 的轨迹在过 $A=\xi\times\eta$ 的一直线上.

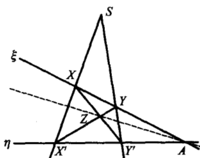


图 1－5－4

证 由第四调和点的作法，易知 AZ 是三直线 ξ,η,AS 的第四调和直线，因此 Z 在过点 A 的定直线上.

例 4 实际上就是 § 1.1 中的例 3.

1.5.4 欧氏平面上交比的计算与运用

设 (x,y) 是欧氏平面上直角坐标，对应的齐次坐标是 (x_1,x_2,x_3)，$x=\dfrac{x_1}{x_3}$，$y=\dfrac{x_2}{x_3}$.

性质 1.5.6 欧氏平面上共线四点 $A_i(x_i,y_i)$，$i=1,2,3,4$，的交比是

$$R(A_1A_2,A_3A_4)=\frac{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}{(x_2-x_3)(x_1-x_4)}=\frac{(y_1-y_3)(y_2-y_4)}{(y_2-y_3)(y_1-y_4)}.$$

证 由交比定义，如果在齐次坐标下，

$$(x_3,y_3,1)=\lambda_1(x_1,y_1,1)+\lambda_2(x_2,y_2,1),$$

$$(x_4,y_4,1)=\mu_1(x_1,y_1,1)+\mu_2(x_2,y_2,1),$$

则 $R(A_1A_2,A_3A_4)=\dfrac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2}$. 利用 $\lambda_1=1-\lambda_2$，$\lambda_2=1-\lambda_1$，得 $(x_3-$

$x_1, y_3-y_1, 0)=\lambda_2(x_2-x_1, y_2-y_1, 0)$及$(x_3-x_2, y_3-y_2, 0)=-\lambda_1(x_2-x_1, y_2-y_1, 0)$.因此

$$\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}=\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

同理可得$\frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}=\frac{y_4-y_1}{y_4-y_2}=-\frac{\mu_2}{\mu_1}$,代入$R(A_1A_2, A_3A_4)=\frac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2}$就得到性质中等式.

在欧氏平面上,两点A,B把它们所在的直线分成三段,以AB表示从A到B的有限长一段所成的有向线段,并且规定$-AB=BA$.这样,如果A,B,C,D是共线四点,$\frac{AB}{CD}$作为有向线段长度之比有意义.按照有向线段的约定$\frac{AB}{CD}=-\frac{BA}{CD}$.

推论 1.5.7 共线四点的交比$R(AB, CD)=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BD}{AD}$.

证 以AB为坐标系的x轴,则$A(a,0)$,$B(b,0)$,$C(c,0)$,$D(d,0)$,由性质1.5.5,

$$R(AB, CD)=\frac{a-c}{b-c}\cdot\frac{b-d}{a-d}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BD}{AD}.$$

利用此推论,根据四点的位置可判断交比的符号.如图1-5-5,点对A,B与C,D互相分隔,则$R(AB, CD)<0$.如图1-5-6,点对E,F与G,H并不互相分隔,它们的交比$R(EF, GH)>0$.

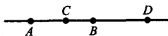


图 1-5-5

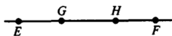


图 1-5-6

例 5 如图1-5-7,设AD,AE是$\triangle ABC$的$\angle BAC$的内外角平分线,则$|BD|:|DC|=|AB|:|AC|=|BE|:|EC|$,所以

$$R(BC, DE)=\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{BE}=-\frac{|AB|}{|AC|}\cdot\frac{|AC|}{|AB|}=-1.$$

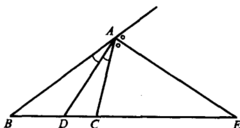


图 1－5－7

同样有 $R(ABAC,ADAE)=-1$.

推论 1.5.8 如果 P_∞ 是直线 AB 上的无穷远点，C 是 AB 上另一普通点，则

$$R(AB,CP_\infty)=\frac{AC}{BC}.$$

特别，如果 A,B,C,P_∞ 是调和点列，则 C 是线段 AB 的中点.

证 设 D 是直线 AB 上任一点，则

$$R(AB,CP_\infty)=\lim_{D\to P_\infty}R(AB,CD)=\lim_{D\to P_\infty}\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BD}{AD}=\frac{AC}{BC}.$$

如图 1－5－8，设 D 是 $\triangle ABC$ 底边 BC 上一点，G 是线段 AD 上点，$E=BG\times AC$，$F=CG\times AB$. 由推论 1.5.7，D 是 BC 中点的充要条件是 EF 平行于 BC. 因此，G 是 $\triangle ABC$ 的重心的充要条件是 EF 与 BC，ED 与 AB，DF 与 AC 中有两对平行.

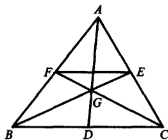


图 1－5－8

例 6 如图 1－5－9，设 O 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上高 AD 上一点，$E=BO\times AC$，$F=CO\times AB$，则 AD 是 $\angle EDF$ 的平分线.

证 记 $P=EF\times BC$，$U=AD\times EF$，由第四调和点的作法，

$$R(BC,DP)=R(FE,UP)=-1.$$

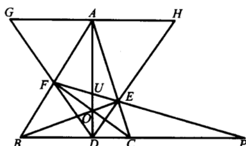


图 1-5-9

过 A 作 BC 的平行线分别交 DF, DE 于 G, H. 记 GH 上无穷远点为 P_∞, 由性质 1.5.2, DF, DE, DA, DP 是调和直线, 因此 G, H, A, P_∞ 是调和点列, 根据推论 1.5.7, A 是 GH 的中点. 由于 $AD \perp GH$, $\triangle GAD$ 与 $\triangle HAD$ 是全等三角形, 所以 AD 是 $\angle GDH$ 的平分线.

如果点 O 在线段 AD 之外或垂足 D 在线段 BC 之外, 图形需作相应改变, 而以上证明仍成立, 这也是射影几何方法证题的优点之一. 读者可以作出相应的图形. 例 6 证明了, 如果点 O 是 $\triangle ABC$ 内一点, 且是三角形的垂心, 则 O 也是 $\triangle DEF$ 的三条角平分线的交点, 是三角形 DEF 的内心. 反过来, 利用同样的方法可以证明, 如果点 O 是 $\triangle DEF$ 的内心, O 在 $\triangle ABC$ 内, 则它也是 $\triangle ABC$ 的垂心, 读者可考虑 O 在 $\triangle ABC$ 外的情况.

下面讨论欧氏平面上四直线交比的计算. 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 是线束 S 中四直线, 选定平面上绕 S 旋转的一个方向, 再取线束 S 中与 ξ_i 均不重合的直线 ζ, 见图 1-5-10. 这样可以定义四直线在 ζ 的某一侧所成四射线的有向角, ξ_i, ξ_j 的夹角记为 (ξ_i, ξ_j). 如果 ξ_i 可以按照给定方向在 ζ 指定的一侧转到 ξ_j, 则 (ξ_i, ξ_j) 为正, 否则 (ξ_i, ξ_j) 为负, $0 < |(\xi_i, \xi_j)| < \pi$, $(\xi_i, \xi_j) = -(\xi_j, \xi_i)$.

性质 1.5.9 $R(\xi_1\xi_2, \xi_3\xi_4) = \dfrac{\sin(\xi_1, \xi_3)\sin(\xi_2, \xi_4)}{\sin(\xi_2, \xi_3)\sin(\xi_1, \xi_4)}$.

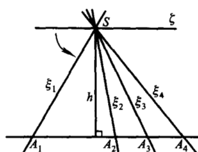


图 1-5-10

证 在直线 ζ 指定的一侧作直线分别与 ξ_i 交于 A_i，由性质 1.5.2，推论 1.5.6，

$$R(\xi_1\xi_2,\xi_3\xi_4)=R(A_1A_2,A_3A_4)=\frac{A_1A_3}{A_2A_3}\cdot\frac{A_2A_4}{A_1A_4}.$$

设 S 到直线 A_1A_2 的距离为 h，则 $\frac{1}{2}h\,|A_iA_j|$ 是 $\triangle SA_iA_j$ 的面积，$i\neq j$. 以 $\frac{1}{2}h\cdot A_iA_j$ 表示 $\triangle SA_iA_j$ 的有向面积，易知，

$$\frac{1}{2}h\cdot A_iA_j=\frac{1}{2}|SA_i|\cdot|SA_j|\sin(\xi_i,\xi_j).$$

由此不难知道

$$R(\xi_1\xi_2,\xi_3\xi_4)=\frac{\sin(\xi_1,\xi_3)\sin(\xi_2,\xi_4)}{\sin(\xi_2,\xi_3)\sin(\xi_1,\xi_4)}.$$

例 7 如图 1-5-11，设 AB 是圆 O 的直径，过圆 O 上点 P 的切线交 AB 延长线于 C，过 P 作 AB 的垂线，垂足为 D，则 $R(AB,CD)=-1$.

证 记 $\angle BPC=\theta$，不难知道，$\angle PAB=\angle DPB=\theta$，$\angle APD=\frac{\pi}{2}-\theta$，因此

$$\begin{aligned}R(AB,DC)&=R(PAPB,PDPC)\\&=\frac{\sin(PA,PD)\sin(PB,PC)}{\sin(PB,PD)\sin(PA,PC)}\end{aligned}$$

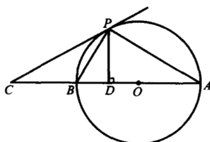


图 1－5－11

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\theta}{\sin(-\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} = -1.$$

由例 7 可得到作过圆上一点 P 切线的方法：任作一直径 AB，过圆上点 P 向 AB 作垂线，垂足为 D. 作出 A,B,D 的第四调和点 C，则 PC 是圆的切线.

例 8 设 A,B,C,D 是圆上四定点，利用同弧上的圆周角相等，容易证明，对于圆上任两点 P,Q，四直线 PA,PB,PC,PD 与 QA,QB,QC,QD 的交比相等，如图 1－5－12.

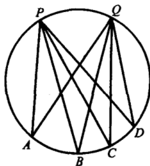


图 1－5－12

例 9（Ceva 定理） 设 P',Q',R' 分别是△ABC 三边 BC,CA,AB 上三点，则 AP',BQ',CR' 交于一点的充要条件是

$$\frac{AR'}{R'B}\cdot\frac{BP'}{P'C}\cdot\frac{CQ'}{Q'A}=1.$$

证 由例 2，AP',BQ',CR' 交于一点的充要条件是

$$R(BC,P'P)R(CA,Q'Q)R(AB,R'R)=-1,$$

其中 P,Q,R 分别是 BC,CA,AB 上共线的三点. 如果取 P,Q,R 分别是直线 BC,CA,AB 上的无穷远点，则

$$R(BC,P'P)=\frac{BP'}{CP'},R(CA,Q'Q)=\frac{CQ'}{AQ'},R(AB,R'R)=\frac{AR'}{BR'},$$

因此 AP',BQ',CR'交于一点的充要条件是

$$\frac{AR'}{R'B}\cdot\frac{BP'}{P'C}\cdot\frac{CQ'}{Q'A}=1.$$

习题 1.5

1. 证明三点 $A(1,4,1),B(0,1,1),C(2,3,-3)$共线,并求点 U,V 使得 $R(AB,CU)=1,R(AB,CV)=-1$.

2. 已知四直线 $\xi:x_1-2x_2=0$, $\eta:x_1-x_2=0$, $\zeta:3x_1-x_2=0$, $\theta:2x_1+x_2=0$,计算 $R(\xi\eta,\zeta\theta),R(\zeta\xi,\theta\eta),R(\xi\theta,\zeta\eta)$.

3. 设直线 ξ 交三点形 ABC 的三边 BC,CA,AB 分别于 P,Q,R. 设 P',Q',R'也分别是 BC,CA,AB 上三点. 试证 P',Q',R'共线的充要条件是

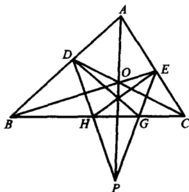
$$R(BC,P'P)R(CA,Q'Q)R(AB,R'R)=1.$$

4. (Menelaus 定理)在欧氏平面上,设 P,Q,R 分别是三角形 ABC 三边 BC,CA,AB 上三点,则 P,Q,R 共线的充要条件是

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=-1.$$

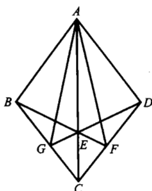
5. 欧氏平面上,A,B 是直线 ξ 上两点,ξ'是 ξ 的平行线,试只用直尺作出 AB 的中点,并说明理由.

6. 设 O 是不在三角形 ABC 三边上的一点,$D=CO\times AB,E=BO\times AC$, P 是 AO 上任一点,$H=PD\times BC,G=PE\times BC$,则 DG 与 EH 交点在 AO 上.

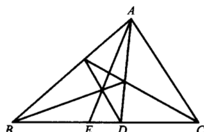


习题 6

7. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAC=\angle CAD$，BF 与 DG 交于 AC 上点 E. 试证，$\angle GAC=\angle CAF$.



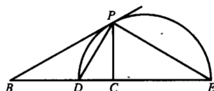
习题 7



习题 8

8. 如图，B,D,E,C 是调和点列，$\angle BAD=\angle DAC$. 试证 $3\tan\angle EAD=\tan\angle BAD$.

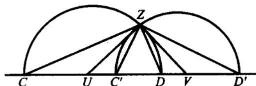
9. 设 B,C,D,E 是调和点列，P 是以 DE 为直径的圆上任意一点，则 PD 与 PE 是 $\angle BPC$ 的内外角平分线，且如果 PC 垂直于 DE，则 BP 是圆的切线.



习题 9

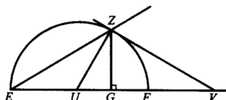
10. 设 C,C',D,D' 是如图的共线四点，以 $CD,C'D'$ 为直径分别作半圆交于 Z，$\angle CZC'$，$\angle DZD'$ 的角平分线与 CC' 分别交于点 U,V. 试证，

$$R(UV,CC')=R(UV,DD')=-1.$$



习题 10

11. 设 Z 是以 EF 为直径的半圆上一点，G 是过 Z 向直线 EF 作垂线的垂足，$\angle EZG$ 的内外角平分线与 EF 分别交于点 U, V. 试证，$R(UV, EG) = -1$，且 $UF = FV$.



习题 11

第二章
射影映射

这一章讨论射影映射，它是射影几何的重要组成部分，也是研究射影几何与相关几何的有力工具．射影直线与平面上的所有射影变换都构成群，叫射影变换群．按照 Klein 的变换群观点，射影几何主要研究在所有射影变换下不变的性质和量．射影变换的重要性还在于它是仿射平面上仿射变换和欧氏平面上欧氏变换的推广，因此射影变换可以运用于仿射与欧氏几何．在第五，第六章我们还将把它应用于双曲与椭圆几何．§2.1 与 §2.2 给出一般变换群的定义并讨论一维射影映射．§2.3 与 §2.4 讨论射影平面上的射影映射并给出一些在欧氏几何中运用的例子．

§2.1 一维射影映射

2.1.1 变换群

设 φ 是集合 M 到自身的一个映射，如果 $\varphi: M \longrightarrow M$ 是一一的，即 φ 既是单射又是满射，则称 φ 是 M 上的一个变换．对于 $m \in M$，m 在映射 φ 下的像记为 $\varphi(m)$．对任意 M 上变换 φ_1, φ_2，利用 $(\varphi_1 \circ \varphi_2)(m) = \varphi_1(\varphi_2(m))$ 定义的映射 $\varphi_1 \circ \varphi_2$ 也是 M 上的一一的映射，因此 $\varphi_1 \circ \varphi_2$ 也是 M 上的变换．按照定义，$\varphi_1 \circ \varphi_2$ 是对集合 M 先进行变换 φ_2 再进行变换 φ_1，$\varphi_1 \circ \varphi_2$ 叫做变换的合成．M 上的任意变换 φ 的逆变换也存在，记为 φ^{-1}，它满足 $\varphi \circ \varphi^{-1}$

$=\varphi^{-1}\circ\varphi=I$，这里 I 表示 M 上恒等变换，即对任意 $m\in M$，$I(m)=m$.以后我们常常省略记号"$\circ$".

定义 2.1.1 如果 G 是 M 上某些变换的非空集合，且满足

(ⅰ) 对任意 $\varphi_1,\varphi_2\in G$，φ_1,φ_2 的合成 $\varphi_1\circ\varphi_2\in G$；

(ⅱ) 对任意 $\varphi\in G$，φ 的逆变换 $\varphi^{-1}\in G$，

则称 G 是 M 上的一个变换群，简称为群.

映射 φ_1,φ_2 的合成 $\varphi_1\circ\varphi_2$ 叫群的乘法，按照定义 $\varphi_2\circ\varphi_1$ 也是 G 中元素.根据定义 2.1.1，变换群 G 上有两种基本运算，一种是乘法，一种是取逆.

性质 2.1.1 设 G 是 M 上的一个变换群，则

(ⅰ) 恒等变换 $I\in G$，并且对于任意 $\varphi\in G$，$I\circ\varphi=\varphi\circ I=\varphi$，$I$ 叫群 G 的单位元；

(ⅱ) G 中乘法满足结合律，即对任意 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in G$，总有

$$(\varphi_1\circ\varphi_2)\circ\varphi_3=\varphi_1\circ(\varphi_2\circ\varphi_3).$$

这一性质的证明很容易，故略去.要注意的是，对于一般群来说性质 2.1.1 中两个条件也是群定义的组成部分，只是由于我们这里讨论的是变换群，定义的条件才可以减少，此两条件可作为性质推出.

例 1 以 $SO(2)$ 表示欧氏平面上所有绕定点 O 的旋转所成集合，如果 $\varphi_1,\varphi_2\in SO(2)$，旋转角分别是 θ_1,θ_2，容易知道 $\varphi_1\varphi_2$ 也是绕 O 的旋转，旋转角是 $\theta_1+\theta_2$；而 $\varphi_1^{-1},\varphi_2^{-1}$ 分别是旋转角为 $-\theta_1,-\theta_2$ 的绕 O 的旋转.按照定义，$SO(2)$ 是平面上的变换群，叫欧氏平面上的旋转群，下面推导旋转的坐标表示式.

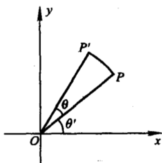


图 2-1-1

设 O 是坐标原点，旋转角是 θ，(x,y)是欧氏平面上点 P 的直角坐标，

(r,θ')是极坐标，$x=r\cos\theta'$，$y=r\sin\theta'$. 点 P 在旋转 φ 下的像是$P'(x',y')$，极坐标是$(r,\theta'+\theta)$，从

$$x'=r\cos(\theta'+\theta),\ y'=r\sin(\theta'+\theta)$$

可得旋转 φ 在直角坐标下的表示式

$$\begin{cases}x'=x\cos\theta-y\sin\theta,\\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta.\end{cases}$$

假如旋转 ψ 的旋转中心是$P_0(x_0,y_0)$，旋转角仍是 θ，用类似方法(或对上面结果利用平移)得到旋转 ψ 的表示式：

$$\begin{cases}x'=(x-x_0)\cos\theta-(y-y_0)\sin\theta+x_0,\\ y'=(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta+y_0.\end{cases}$$

如果对于群 G 中任意元素 φ_1,φ_2，总有 $\varphi_1\varphi_2=\varphi_2\varphi_1$，则 G 叫做**交换群**. 从上面讨论可知，旋转群 $SO(2)$是交换群.

例 2 设 ξ 是欧氏平面上一条定直线，对于平面上任一点 P，取它关于 ξ 的对称点P'，则 $P\to P'$定义的欧氏平面上的变换 φ 叫做反射，ξ 是反射轴，易见 $\varphi^2=I$，$\varphi^{-1}=\varphi$. 如果 φ,ψ 分别是欧氏平面上以ξ,η 为反射轴的反射，它们的合成 $\varphi\psi$ 与 $\psi\varphi$ 都不再是反射. 欧氏平面上所有反射所成集合不是群.

利用作图不难证明

(1) 如果 φ 与 ψ 的反射轴 ξ 与 η 平行，则 $\varphi\psi$ 与 $\psi\varphi$ 都是欧氏平面上的平移，并且 $\varphi\psi$ 与 $\psi\varphi$ 互为逆变换；

(2) 如果 ξ 与 η 相交，则 $\varphi\psi$ 与 $\psi\varphi$ 都是旋转，旋转中心是反射轴 ξ 与 η 的交点，与情况(1)一样，$\varphi\psi$ 与 $\psi\varphi$ 也互为逆变换.

例 3 欧氏平面上所有的平移构成群，它是交换群.

证明留作练习，关于群的一般定义与性质可以参阅代数的有关书籍.

2.1.2 透视

在介绍点列中点与线束中直线的交比时，我们定义了点列与线束之间的透视映射，它是把线束中直线与点列的交点作为线束与点

列的对应元素来定义的.如图 2－1－2 所示,线束 S 与点列 ξ 之间的透视

$$S(\eta,\zeta,\theta,\cdots)\doublebarwedge\xi(A,B,C,\cdots),$$

它的逆映射也是透视:$\xi(A,B,C,\cdots)\doublebarwedge S(\eta,\zeta,\theta,\cdots)$.

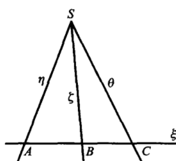


图 2－1－2

下面再定义两种透视对应.

定义 2.1.2 设 S 是不在射影平面的直线 ξ,ξ' 上的定点,把过点 S 的直线与 ξ 及 ξ' 的交点作为直线 ξ 与 ξ' 上的对应点,称这样定义的映射是直线 ξ 与 ξ' 之间的透视对应,简称为透视,S 称为透视中心.这样的映射 φ 记为

$\xi(A,B,\cdots)\doublebarwedge\xi'(A',B',\cdots)$,其中 $A'=\varphi(A),B'=\varphi(B),\cdots$,

也常简记为 $\varphi:\xi\doublebarwedge\xi'$ 或 $\xi\overset{S}{\doublebarwedge}\xi'$(图 2－1－3).

对偶地定义线束与线束之间的透视映射

定义 2.1.3 设直线 ξ 是不过线束 S_1 与 S_2 的中心的直线,把 S_1,S_2 与 ξ 上点的连线作为线束 S_1 与 S_2 中直线的对应元素所定义的线束 S_1 与 S_2 之间的映射记为 ψ,称 ψ 是线束 S_1 与 S_2 之间的透视,ξ 是透视轴.记为

$$\psi:S_1(S_1A,S_1B,\cdots)\doublebarwedge S_2(S_2A,S_2B,\cdots),A,B,\cdots\in\xi,$$

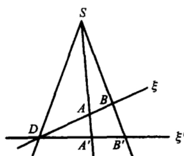


图 2－1－3

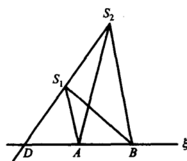


图 2－1－4

也简记为 $\psi:S_1\doublebarwedge S_2$,或 $S_1\overset{\xi}{\doublebarwedge}S_2$(见图 2－1－4).

图 2-1-3 与图 2-1-4 中透视分别可用线束与直线之间的透视来合成：

$$\xi(A,B,\cdots)\barwedge S(SA,SB,\cdots)\barwedge \xi'(A',B',\cdots);$$

$$S_1(S_1A,S_1B,\cdots)\barwedge \xi(A,B,\cdots)\barwedge S_2(S_2A,S_2B,\cdots).$$

所以线束与直线之间的透视是三种透视中最基本的.

下面的性质是显然的.

性质 2.1.2 (ⅰ) 透视映射是一一的,并且是保交比的；

(ⅱ) 透视映射的逆映射也是透视；

(ⅲ) 透视 $\xi\barwedge\xi'$ 的不动点是点列 ξ 与 ξ' 的交点 $\xi\times\xi'$；类似地,透视 $S_1\barwedge S_2$ 的不动线是线束 S_1,S_2 的中心连线 S_1S_2.

例 4 如果 ξ 与 ξ' 是射影平面上两条直线,D 是它们的交点,如果 ξ 上另有点 B,C,ξ' 上另有点 B',C',则存在唯一的透视使

$$\xi(D,B,C,\cdots)\barwedge \xi'(D,B',C',\cdots),$$

透视中心是直线 BB' 与 CC' 的交点.

利用作图不难知道,如果 $\varphi:\xi\barwedge\xi'$,$\psi:\xi'\barwedge\xi''$ 是两个透视,那么它们合成的映射 $\psi\varphi:\xi\to\xi''$ 虽然仍是一一的映射,但一般不再是透视.

2.1.3 一维射影映射

点列与线束是射影平面上最基本的一维图形,下面以直线为例,介绍一维图形之间的一种特殊的映射——射影映射.

定义 2.1.4 如果直线之间映射 $\varphi:\xi(A,B,\cdots)\longrightarrow\xi'(A',B',\cdots)$,$A'=\varphi(A)$,$B'=\varphi(B)$,…,可以分解为一系列透视的乘积：

$$\xi(A,B,\cdots)\barwedge \xi_1(A_1,B_1,\cdots)\barwedge\cdots\barwedge \xi'(A',B',\cdots),$$

则称 φ 是一维射影映射,记为

$$\varphi:\xi(A,B,\cdots)\barwedge \xi'(A',B',\cdots),\text{也简记为 }\varphi:\xi\barwedge\xi'.$$

由定义,点列之间的透视是射影映射.从以上定义以及透视的性质立即可得

性质 2.1.3 （ⅰ）射影映射是一一的，并且是保交比的；

（ⅱ）如果 $\varphi:\xi\barwedge\xi'$，$\psi:\xi'\barwedge\xi''$，则 $\psi\varphi:\xi\barwedge\xi''$，即射影映射的合成也是射影映射；

（ⅲ）射影映射 $\varphi:\xi\barwedge\xi'$ 的逆映射也是射影映射，即 $\varphi^{-1}:\xi'\barwedge\xi$.

下面的定理叫 **Steiner** 定理，它给出了直线之间映射是射影映射的充要条件.

定理 2.1.4(Steiner) 直线之间的映射 $\varphi:\xi\longrightarrow\xi'$ 是射影映射的充要条件是，φ 是一一的，并且是保交比的.

证 必要性由性质 2.1.3 可得，下证充分性. 设 $\varphi:\xi\longrightarrow\xi'$ 是一一的，并且是保交比的映射. 任取 ξ 上相异三点 A,B,C，它们的像 $A'=\varphi(A),B'=\varphi(B),C'=\varphi(C)$ 是 ξ' 上相异三点. 如图 2-1-5，记 $B_0=AB'\times A'B,C_0=AC'\times A'C$，直线 $\alpha=B_0C_0$，以 A,A' 为透视中心可得两个透视

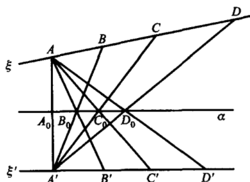


图 2-1-5

$$\xi(A,B,C,D,\cdots)\overset{A'}{\barwedge}\alpha(A_0,B_0,C_0,D_0,\cdots)\overset{A}{\barwedge}\xi'(A',B',C',D',\cdots),$$

其中 $A_0=\alpha\times AA'$，D 是 ξ 上任一点. 此两透视合成的射影映射记为 φ'，由于 φ 与 φ' 都是保交比的，

$$R(AB,CD)=R(A'B',C'\varphi(D))=R(A'B',C'\varphi'(D)).$$

因为 A', B', C' 是相异三点，从而有 $\varphi(D)=\varphi'(D)$. 由假设 D 是 ξ 上任一点，这证明了 $\varphi=\varphi'$ 是射影映射.

Steiner 定理的条件可以减弱为：

直线之间的连续映射是射影映射的充要条件是此映射是一一的，并且是保持调和点列的.

这一定理的证明可以参看钟集：高等几何，p.60－64.

从定理 2.1.4 的证明可得到

推论 2.1.5 （ⅰ）直线之间的射影映射由三对对应点确定；

（ⅱ）两直线之间的射影映射总可以分解成两个透视的乘积.

两直线之间的非透视的射影映射分解成两个透视的方法不是唯一的，也可以分解成多个透视，只要经过这些透视实现射影映射的任意取定的三对对应点的对应. 例如除了定理 2.1.4 中所用的方法外，还可以用图 2－1－6 所示的方法. 设

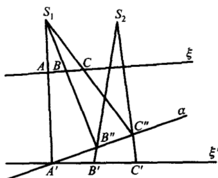


图 2－1－6

$$\varphi:\xi(A,B,C,\cdots)\barwedge\xi'(A',B',C',\cdots),$$

任取过 A' 的直线 α，在直线 AA' 上取点 S_1，记 $B''=\alpha\times S_1B$, $C''=\alpha\times S_1C$, $S_2=B'B''\times C'C''$，则

$$\xi(A,B,C,\cdots)\overset{S_1}{\barwedge}\alpha(A',B'',C'',\cdots)\overset{S_2}{\barwedge}\xi'(A',B',C',\cdots),$$

这两映射的合成就是 φ. 利用这两个透视也容易作出直线 ξ 上任一点的像. 从上面的讨论知道，由两直线上三对对应点确定的射影

映射的其他对应点的对应法则与将映射分解成透视的方法无关.

推论 2.1.6 直线到自身的射影映射(称为射影变换)可以分解成不多于三个透视的乘积.

证 设 $\varphi:\xi \barwedge \xi$ 是直线 ξ 上的射影变换,任取另一直线 η,并作透视 $\psi:\xi \doublebarwedge \eta$. 由推论 2.1.5,射影映射 $\psi\varphi:\xi \barwedge \eta$ 如果不是透视,则它可分解成两个透视的乘积,设为 ψ_1,ψ_2,即 $\psi\varphi=\psi_1\psi_2$. 由于 $\psi^{-1}:\eta \doublebarwedge \xi$ 也是透视,$\varphi=\psi^{-1}\psi_1\psi_2$ 是三个透视的乘积.

在§2.2,我们将对这种变换作进一步的讨论. 下面的推论常常很有用,它的证明留作练习.

推论 2.1.7 设 $A,B,C,D;A',B',C',D'$ 分别是直线 ξ 与 ξ' 上相异四点,如果它们的交比相等,即 $R(AB,CD)=R(A'B',C'D')$,则存在射影映射 φ,使得

$$\varphi:\xi(A,B,C,D,\cdots)\barwedge \xi'(A',B',C',D',\cdots).$$

例如,设 A,B,C,D 与 A',B',C',D' 分别是直线 ξ 与 ξ' 上调和点列,那么存在唯一的 $\varphi:\xi \barwedge \xi'$,把 A,B,C,D 分别变为 A',B',C',D'.

下面的定理给出了射影映射 $\varphi:\xi \barwedge \xi'$ 是透视的充要条件.

定理 2.1.8 两相异直线之间的射影映射是透视的充要条件是它把两直线的交点变成自身,这时对应点的连线过一个定点,此点为透视中心.

证 必要性显然,下证充分性. 设 $\varphi:\xi \barwedge \xi'$ 是射影映射,$D=\xi\times\xi'$,$\varphi(D)=D$. 在直线 ξ 上另取 A,B,记 $A'=\varphi(A)$,$B'=\varphi(B)$,由于 ξ 与 ξ' 不重合,直线 AA' 与 BB' 交于一点,设为 S. 显然,以 S 为中心的 ξ 与 ξ' 之间透视把 A,B,D 分别变成 A',B',D. 射影映射由三对对应点所确定,因此 φ 是以 S 为中心的透视.

对偶地可以讨论线束与线束之间的射影映射,也可以定义并讨论点列与线束之间的射影映射,这些映射与上面讨论的点列之间的射影映射都称为一维射影映射. 对这些映射的性质不再一一列举,为了后面的应用,把主要结论总结成下面的定理.

定理 2.1.9 （ⅰ）两线束 S_1 与 S_2 之间的映射 φ 是射影映射的充要条件是 φ 一一的，并且是保交比的；

（ⅱ）射影映射 $\varphi: S_1 \barwedge S_2$ 由三对对应直线唯一确定，它总可以表示成两个透视的合成；

（ⅲ）φ 是透视的充要条件是线束中心的连线 S_1S_2 在 φ 下不变，这时 φ 的对应直线的交点在一直线上，此直线就是透视轴.

例 5 如图 2－1－7，设 O 是两定直线 ξ，η 的交点，定点 S_1，S_2 与 O 也共线，过定点 M 的动直线分别交 ξ，η 于 A，A'，试证直线 S_1A 与 S_2A' 的交点轨迹是一直线.

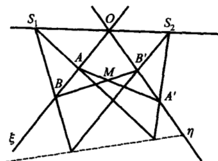


图 2－1－7

证 如图 2－1－7，可得下列透视：

$$S_1(S_1A, S_1B, \cdots) \overset{\xi}{\barwedge} M(MA, MB, \cdots) \overset{\eta}{\barwedge} S_2(S_2A', S_2B', \cdots),$$

于是得线束 S_1 与 S_2 之间映射

$$S_1(S_1A, S_1B, \cdots) \barwedge S_2(S_2A', S_2B', \cdots).$$

从这一映射的构造可知直线 S_1S_2 是自对应直线，于是

$$S_1(S_1A, S_1B, \cdots) \doublebarwedge S_2(S_2A', S_2B', \cdots),$$

所以 $S_1A \times S_2A'$，$S_1B \times S_2B'$，…在一直线上.

此题也可考虑直线 S_1S_2 与 AA' 上三点组 O，S_1，S_2 与 M，A，A'，用 Pappus 定理证明. 证明留作练习.

例 6　下面利用射影映射证明 Desargues 定理.

证　设三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 关于 S 成透视,如图 2-1-8,P,Q,R 是三对对应边的交点,记 $D=AC\times BB'$,$D'=A'C'\times BB'$.显然 $R(AD,CR)=R(A'D',C'R)$,因此有射影映射

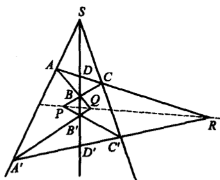


图 2-1-8

$$B(BA,BD,BC,BR,\cdots)\barwedge B'(B'A',B'D',B'C',B'R,\cdots).$$

由于 $BD=B'D'$,所以它是透视,对应直线交点 Q,P,R 共线.

反之,如果 P,Q,R 共线,则有透视

$$B(BA,BD,BC,BR,\cdots)\doublebarwedge B'(B'A',B'D',B'C',B'R,\cdots).$$

考虑两边与 $AC,A'C'$ 交线得:

$AC(A,D,C,R,\cdots)\doublebarwedge A'C'(A',D',C',R,\cdots)$,$R$ 为自对应点.因此 $AA',DD'=BB',CC'$ 交于一点,这证明了 Desargues 定理.

定理 2.1.10(Pappus)　设 $A,B,C;A',B',C'$ 分别是直线 ξ,ξ' 上的三个不同点,则下面三点共线

$$P=BC'\times B'C,Q=AC'\times A'C,R=AB'\times A'B.$$

证　记 $O=\xi\times\xi'$,假如 A,B,C,A',B',C' 中有点与 O 重合,则定理成立,下面假设这些点都相异.如图 2-1-9,记 $U=AC'\times A'B$,$V=A'C\times BC'$,则有

$$A'B(A',R,U,B,\cdots)\overset{A}{\doublebarwedge}\xi'(A',B',C',O,\cdots)\overset{C}{\doublebarwedge}BC'(V,P,C',B,\cdots),$$

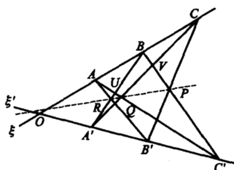


图 2-1-9

它们合成直线 $A'B$ 与 BC' 之间的射影映射，由于 B 是自对应点，得

$$A'B(A',R,U,B,\cdots)\overline{\wedge} BC'(V,P,C',B,\cdots),$$

点 $Q=A'V\times UC'=A'C\times AC'$ 是它的透视中心，因此 P,Q,R 共线.

此定理与它的对偶定理都叫做 Pappus 定理. 直线 PQ 叫做三点组 $\begin{pmatrix}A & B & C\\ A' & B' & C'\end{pmatrix}$ 的 Pappus 线，对于直线 ξ 与 ξ' 上取定的六点 A,B,C 与 A',B',C'，根据不同的排列最多有六条不同的 Pappus 线，下面的例说明这些 Pappus 线之间的关系.

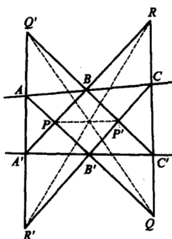


图 2-1-10

例 7 试证直线 ξ 与 ξ' 上相异三点 A,B,C 与 A',B',C' 决定的六条 Pappus 线可以分成两组，每组的三条 Pappus 线交于一点.

证 如图 2-1-10，考虑三点组 $\begin{pmatrix}A & B & C\\ A' & B' & C'\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}B & C & A\\ A' & B' & C'\end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix} C & A & B \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$,它们的 Pappus 线分别是 PP',QQ',RR',要证明它们交于一点.考虑三点形 PQR 与 $P'Q'R'$,它们的对应边交点

$$PQ\times P'Q'=AB'\times BC',PR\times P'R'=BA'\times CB',QR\times Q'R'=CC'\times AA',$$

恰是三点组 $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C' & B' & A' \end{pmatrix}$ 的 Pappus 线上的三点.由 Desargues 定理,三点形 PQR 与 $P'Q'R'$ 成透视,因此,三直线 PP',QQ',RR' 交于一点.

利用 Pappus 定理,可给出§1.3 中例 5 的另一种证法.仍用那里的记号,对共线三点组 $\begin{pmatrix} A & A' & O \\ B & C' & O' \end{pmatrix}$ 运用 Pappus 定理,可得

$$A'O'\times OC'=C,\ AO'\times OB=B',\ AC'\times A'B=O''$$

三点共线,即三点形 ABC 与 $C'A'B'$ 关于点 O'' 成透视.

在定理 2.1.4 中,我们证明了两条直线之间的射影映射总可以分解为两个透视的乘积.仍然采用定理 2.1.4 及图 2-1-5 中记号,$\varphi:\xi \barwedge \xi'$ 可以分解为

$$\xi(A,B,C,\cdots)\overset{A'}{\barwedge}\alpha(A_0,B_0,C_0,\cdots)\overset{A}{\barwedge}\xi'(A',B',C',\cdots).$$

不难知道,直线 α 是三点组 $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ 的 Pappus 线.在习题 10 中我们要证明,对于直线 ξ 上任意两点 P,Q,它们的像是 $P'=\varphi(P)$,$Q'=\varphi(Q)$,则 $PQ'\times P'Q$ 在一条定直线上,此定直线就是 α.这样,知道了射影映射 $\varphi:\xi \barwedge \xi'$ 的任一对对应点及直线 α,其他对应点就可作出.我们把直线 α 也叫做映射 $\varphi:\xi \barwedge \xi'$ 的 Pappus 线.

利用对偶原理可以得到

例 8 如图 2-1-11,设 $\psi:S_1(\xi)\barwedge S_2(\xi')$ 是两线束之间的射影映射,如果 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是线束 S_1 中任意三直线,它们的像是 $\xi_i'=\psi(\xi_i)$,$i=1,2,3$,对三线组 $\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' \end{pmatrix}$ 运用 Pappus 定理

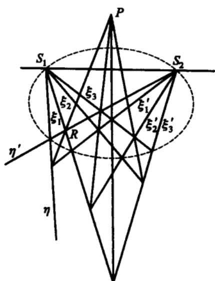


图 2-1-11

可知三直线

$$(\xi_1\times\xi_2')\times(\xi_2\times\xi_1'),(\xi_1\times\xi_3')\times(\xi_3\times\xi_1'),(\xi_2\times\xi_3')\times(\xi_3\times\xi_2')$$

交于一点 P. 并且对线束 S_1 中任意直线 ξ 与 η, 它们的像 $\xi'=\psi(\xi)$, $\eta'=\psi(\eta)$, 则 $(\xi\times\eta')\times(\xi'\times\eta)$ 也是过定点 P 的直线, 我们把 P 叫做映射 $\psi:S_1\barwedge S_2$ 的 Pappus 点. 取 $\xi=\xi_1$, 则可以作出直线 η 的像 η'. 作法如下: 设直线 $(\xi_1'\times\eta)\times P$ 与 ξ_1 的交点为 R, 则 $\eta'=S_2R$. 利用这一作法可作出 PS_1 与 PS_2 的像,

$$\psi(PS_1)=S_1S_2,\psi(S_1S_2)=PS_2.$$

如果 $\psi:S_1\barwedge S_2$ 是透视, 则 $\psi(S_1S_2)=S_1S_2$, 这时 P,S_1,S_2 共线. 在下一章我们将证明, 如果 $\psi:S_1\barwedge S_2$ 不是透视, 那么映射 ψ 的对应直线的交点构成一条二次曲线, S_1,S_2 也是此二次曲线上点, 并且 PS_1 与 PS_2 分别是二次曲线在 S_1,S_2 处的切线.

2.1.4 一维射影映射的坐标表示

下面以直线与直线之间的射影映射为例讨论射影映射的坐标

表示.设(x_1,x_2)是直线ξ上点的射影坐标,(x_1',x_2')是ξ'上的射影坐标.

定理 2.1.11 映射$\varphi:\xi\to\xi'$是射影映射的充要条件是,在各自的坐标下

$$\varphi:\begin{cases}\rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2,\\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2,\end{cases}\quad \rho\neq 0,$$

变换矩阵$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$非退化.

证 必要性:设$\varphi:\xi\to\xi'$是射影映射,A,B,C是ξ上坐标为$(1,0),(0,1),(1,1)$的三点,它们的像分别是$A'(a_1',a_2'),B'(b_1',b_2'),C'(c_1',c_2')$.不妨设$c'=a'+b'$,对于$\xi$上任一点$P(x_1,x_2)$,它的像是$P'(x_1',x_2')$.不难算得$R(AB,CP)=\dfrac{x_1}{x_2}$,由于射影映射$\varphi$保持交比,

$$R(A'B',C'P')=R(AB,CP)=\frac{x_1}{x_2}.$$

由假设$c'=a'+b'$及射影坐标的定义,存在非零常数ρ使

$$\rho(x_1',x_2')=x_1a'+x_2b',$$

以$a'=(a_1',a_2'),b'=(b_1',b_2')$代入得$\varphi$的表示式为

$$\begin{cases}\rho x_1'=a_1'x_1+b_1'x_2,\\ \rho x_2'=a_2'x_1+b_2'x_2,\end{cases}$$

因为φ是一一的,A',B'是相异两点,$\begin{vmatrix}a_1'&b_1'\\a_2'&b_2'\end{vmatrix}\neq 0$.记$a_{11}=a_1'$,$a_{12}=b_1',a_{21}=a_2',a_{22}=b_2'$即可.

充分性:如果$\varphi:\xi\to\xi'$的坐标表示式是

$$\varphi:\begin{cases}\rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2,\\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2,\end{cases}$$

矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 非退化. 显然 φ 存在逆映射,因此 φ 是一一的,由定理 2.1.4,只要证明 φ 保持交比. 简记 φ 的表示式为 $\rho x' = Ax$. 设 B,C,D,E 是 ξ 上任意四点,其坐标分别是 b,c,d,e,它们在 φ 下的像 B',C',D',E' 的坐标分别是 $b'=Ab, c'=Ac, d'=Ad, e'=Ae$. 利用 $|Ax\ Ay| = |A(xy)| = |A|\cdot|xy|$ 及 §1.5 中性质 1.5.3,有

$$R(B'C',D'E')=\frac{|b'd'|\cdot|c'e'|}{|c'd'|\cdot|b'e'|}=\frac{|bd|\cdot|ce|}{|cd|\cdot|be|}=R(BC,DE).$$

这证明了 φ 保持交比,是射影映射.

例 9 设射影映射 φ 把直线 ξ 上三点 $A(-1,1), B(0,1), C(1,1)$ 分别映成 ξ' 上点 $A'(0,1), B'(1,1), C'(3,1)$,求 φ 的表示式.

解 法 1):设 φ 的表示式为 $\rho\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,从 $\varphi(A)=A', \varphi(B)=B', \varphi(C)=C'$ 得:

$$\begin{cases} -a_{11}+a_{12}=0, \\ -a_{21}+a_{22}=\rho_1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{12}=\rho_2, \\ a_{22}=\rho_2, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}+a_{12}=3\rho_3, \\ a_{21}+a_{22}=\rho_3, \end{cases}$$

其中 ρ_1,ρ_2,ρ_3 是不为零的常数,解之得

$$\rho\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \rho\neq 0.$$

法 2):设 ξ 上任一点 $P(x_1,x_2)$ 的像是 $\varphi(P)=P'(x_1',x_2')$. 由 φ 保持交比,$R(AB,CP)=R(A'B',C'P')$,可得

$$\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & x_1' \\ 1 & x_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 & x_1' \\ 1 & x_2' \end{vmatrix}}.$$

化简可得 $\dfrac{x_2'}{x_1'}=\dfrac{-x_1+3x_2}{3x_1+3x_2}$,同样得到

$$\begin{cases}\rho x_1' = 3x_1 + 3x_2, \\ \rho x_2' = -x_1 + 3x_2.\end{cases}$$

如果 $\varphi:\xi\to\xi'$ 与 $\psi:\xi\to\xi'$ 是直线 ξ 与直线 ξ' 之间的射影映射，设它们在 ξ 与 ξ' 的射影坐标 x, x' 下表示式分别是

$$\varphi:\rho x' = Ax,\ \psi:\rho x' = Bx.$$

容易证明，$\varphi=\psi$ 的充要条件是映射 φ,ψ 的矩阵 A 与 B 成比例，即有非零常数 μ，使 $A=\mu B$.

同样，由于射影坐标是齐次坐标，映射 $\varphi:\rho x' = Ax$ 的逆映射 $\varphi^{-1}:\rho x = A^{-1}x'$ 的矩阵 A^{-1} 可用伴随矩阵 $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}$ 代替. 例 9 中逆映射可以表示成

$$\varphi^{-1}:\rho\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2'\end{pmatrix}.$$

如果 ξ 与 ξ' 是同一直线，则一般取 (x_1, x_2)，(x_1', x_2') 为 ξ 上同一射影坐标系下的坐标，上面的讨论都成立.

线束与线束，线束与点列之间射影映射的坐标表示式是类似的，不再重复.

习题 2.1

1. 证明欧氏平面上所有的平移构成群.

2. 设 φ 是欧氏平面上关于直线 ξ 的反射，I 是恒等变换，试证 $\{\varphi, I\}$ 构成群.

3. 设 $A(2,1)$，$B(2,-1)$，$C(15,1)$ 是直线 ξ 上三点，$A'(1,1)$，$B'(-6,2)$，$C'(5,4)$ 是直线 ξ' 上三点，试求 $\varphi:\xi(A,B,C,\cdots)\barwedge\xi'(A',B',C',\cdots)$ 的表示式.

4. 设 $A,B,C;A',B',C'$ 分别是直线 ξ 与 ξ' 上三点，记 $P=AB'\times A'B$，$Q=AC'\times A'C$，$U=\xi\times PQ$，$V=\xi'\times PQ$，$O=\xi\times\xi'$. 试证

$$\xi(A,B,C,U,O,\cdots)\barwedge\xi'(A',B',C',O,V,\cdots).$$

5. 设有一个变动的三点形，它的两边各通过一个定点，而三个顶点分别

在共点的三直线上移动，试证第三边也通过一个定点.

6. 设 $\xi^1, \xi^2, \xi^3; \eta^1, \eta^2, \eta^3$ 分别是线束 A, B 中直线，如果 $R(\xi^1\xi^2, \xi^3\xi) = R(\eta^1\eta^2, \eta^3\xi)$，$\xi = AB$，则三点 $\xi^1\times\eta^1, \xi^2\times\eta^2, \xi^3\times\eta^3$ 共线.

7. 写出 Pappus 定理的对偶定理.

8. 设 $D, E; F, G$ 分别是三点形 ABC 的边 AC 与 AB 上点，求证下列三点共线

$$FE\times BC,\ GE\times BD,\ GC\times FD.$$

9. 求证：存在射影映射把直线 ξ 上四相异点 A, B, C, D 分别变成 B, A, C, D 的充要条件是 $R(AB, CD) = -1$.

10. 设 $\varphi: \xi \barwedge \xi'$ 是射影映射，试证：对任意 $P, Q \in \xi$，$P' = \varphi(P)$，$Q' = \varphi(Q)$，点 $PQ'\times P'Q$ 在一定直线上.

§2.2 一维射影变换

2.2.1 直线上的射影变换

直线到自身的射影映射也叫**射影变换**，同样线束到自身的射影映射也叫射影变换，它们统称为一维射影变换. 下面仍以讨论直线上的射影变换为主.

定理 2.2.1 直线上所有的射影变换构成群，称为直线上的射影变换群.

证 以 G 表示直线 ξ 上所有射影变换的集合，显然 G 非空. 直线 ξ 上的映射 φ 在 G 中的充要条件是 $\varphi: \xi\to\xi$ 是一一的，并且是保交比的. 因此，如果 $\varphi_1, \varphi_2 \in G$，则 $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}, \varphi_1\varphi_2$ 也都是一一的，并且是保交比的，它们也是 ξ 上射影变换，所以 G 是群.

坐标下，射影变换 $\varphi: \xi\to\xi$ 可以表示为

$$\varphi: \rho\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ \rho\neq 0,$$

系数矩阵 $A = (a_{ij})$ 非退化. 射影变换 φ 可简记为 $\varphi: \rho x' = Ax$. 设 $\psi: \xi\to\xi$ 是直线 ξ 上另一个射影变换，它的表示式是 $\psi: \rho x' = Bx$.

容易证明，$\varphi\psi$ 与 $\psi\varphi$ 的表示式分别是

$$\varphi\psi: \rho x' = ABx, \quad \psi\varphi: \rho x' = BAx.$$

利用它们也可以证明直线上所有的射影变换构成群.

如果 φ 不是恒等变换，点 P 在 φ 下不变，$\varphi(P)=P$，则 P 叫射影变换 φ 的不动点，或不变点. 易见 $P(x_1,x_2)$ 是不动点的充要条件是存在不为 0 的常数 ρ，使

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \rho x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \rho x_2. \end{cases}$$

消去 ρ 得：

$$a_{12}x_2^2 + (a_{11} - a_{22})x_1x_2 - a_{21}x_1^2 = 0.$$

它的解的情况取决于判别式

$$\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}.$$

从 Δ 的各种情况可以知道射影变换 φ 的不动点的情况，从而给出一维射影变换的分类：

(ⅰ) $\Delta<0$，φ 没有(实的)不动点，称为椭圆型；

(ⅱ) $\Delta>0$，φ 有两个不动点，称为双曲型；

(ⅲ) $\Delta=0$，φ 恰有一个不动点，称为抛物型.

性质 2.2.2 设点 A,B 是双曲型射影变换 φ 的不动点，则对 ξ 上任一点 P，

$$R(AB, P\varphi(P)) = k,$$

其中 k 是常数.

证 设 P,Q 是直线 ξ 上异于 A,B 的两点，则有

$$R(AB,PQ) = R(AB,\varphi(P)\varphi(Q)).$$

记 $P'=\varphi(P)$，$Q'=\varphi(Q)$，则在直线 ξ 上的射影坐标下，

$$\frac{|ap|\cdot|bq|}{|bp|\cdot|aq|} = \frac{|ap'|\cdot|bq'|}{|bp'|\cdot|aq'|}, \quad 即 \quad \frac{|ap|\cdot|bp'|}{|bp|\cdot|ap'|} = \frac{|aq|\cdot|bq'|}{|bq|\cdot|aq'|},$$

所以 $R(AB,PP') = R(AB,QQ')$，由于 P,Q 任意，性质成立.

φ 不是恒等变换，四点 $P,\varphi(P),A,B$ 相异，因此 $k\neq 0,1,\infty$，k 称为双曲型变换 φ 的特征常数. 反过来，给定直线上两个不

动点 A,B 及常数 k，由 $R(AB,P\varphi(P))=k$ 可以唯一的决定一个双曲型的射影变换 $\varphi(k\neq 0,1,\infty)$.

在上一节我们证明了，直线上的射影变换总可以分解为个数不大于 3 的透视的乘积. 如果射影变换 φ 可分解成两个透视 $\xi \barwedge \eta,\eta \barwedge \xi$，透视中心分别是 S,T，那么 $ST\times\xi, D=\xi\times\eta$ 都是 φ 的不动点. 如果 φ 是抛物型的，它只有一个不动点，这时一定有 S,T,D 三点共线，见图 2-2-1. 这证明直线上的椭圆型的射影变换不可能是两个透视之积. 可以证明，抛物型或双曲型的射影变换总可以分解成两个透视的乘积，证明留作练习.

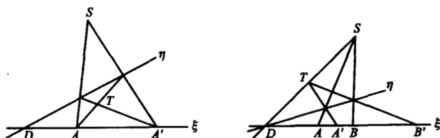


图 2-2-1

2.2.2 对合

先给出对合的一般定义. 设 $\psi: M\to M$ 是集合 M 上的一个变换，如果 ψ 不是恒同，但 ψ^2 是 M 上恒同，即 $\psi^2=I$，则称 ψ 是 M 上的一个对合变换. 例如，欧氏平面上关于一直线的反射是对合. 设 ξ 上射影坐标是 $x=(x_1,x_2)$，射影变换

$$\psi:\rho\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.$$

易知，$\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. ψ 满足 $\psi^2=I$，它是 ξ 上的对合. 下面讨论这种对合的射影变换，简称为对合.

设 $\varphi:\xi\to\xi$ 是对合，则对 ξ 上任一点 P，记 $Q=\varphi(P)$，如果 P

$\neq Q$,则 $P=\varphi^2(P)=\varphi(Q)$,也就是说,对合交换每一对对应点.下面的性质说明,对合的这一特征可由它交换一对对应点代替.

性质 2.2.3 射影变换 $\varphi:\xi \barwedge \xi$ 是对合的充要条件是它交换一对对应点,即存在 ξ 上相异两点 P,Q,使 $P=\varphi(Q)$, $Q=\varphi(P)$.

证 条件显然是必要的,下证充分性.设 $\varphi:\xi \barwedge \xi$ 使 $P=\varphi(Q)$, $Q=\varphi(P)$, P,Q 是 ξ 上相异两点,显然 φ 不是恒同.对于 ξ 上任一点 X, $X'=\varphi(X)$,由于 φ 保交比,

$$\begin{aligned} R(PQ,XX') &= R(\varphi(P)\varphi(Q),\varphi(X)\varphi(X'))=R(QP,X'\varphi(X'))\\ &=R(PQ,\varphi(X')X'). \end{aligned}$$

由于 P,Q,X' 是相异三点,从上式得 $X=\varphi(X')$,即 $X=\varphi(\varphi(X))=\varphi^2(X)$,这证明了 φ 是对合.

性质 2.2.4 直线 ξ 上的射影变换 $\varphi:\rho x'=Ax$ 是对合的充要条件是 $a_{11}+a_{22}=0$.

证 射影变换 $\varphi:\xi \barwedge \xi$ 的逆变换可以表示成:

$$\varphi^{-1}:\rho x'=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}x.$$

如果 φ 是对合, $\varphi^2=I$, $\varphi\neq I$,即 $\varphi=\varphi^{-1}$, $\varphi\neq I$,这时存在非零常数 μ 使

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}.$$

因而 $a_{11}=\mu a_{22}=\mu^2 a_{11}$, $(1+\mu)a_{12}=0$, $(1+\mu)a_{21}=0$.由于 $\varphi\neq I$,不难知道 $\mu=-1$, $a_{11}+a_{22}=0$.条件的充分性容易证明.

由此性质知道,对合 φ 的关于不动点的判别式

$$\Delta=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}=-4|A|\neq 0,$$

因此没有抛物型的对合.

性质 2.2.5 设 A,B 是双曲型对合 φ 的两个不动点,则对任意另外一点 P,

$$R(AB, P\varphi(P)) = -1.$$

证 由于 $\varphi \neq I$，四点 $A, B, P, P' = \varphi(P)$ 相异，由

$$R(AB, PP') = R(AB, P'P) = \frac{1}{R(AB, PP')},$$

得 $R(AB, PP') = \pm 1$，但 A, B, P, P' 是相异四点，

$$R(AB, PP') = -1.$$

结合性质 2.2.2 我们可以说，双曲型对合的特征常数 $k = -1$，这时双曲型对合的任意一对对应点与两个不动点构成调和点列.

例 1 设 $\varphi: A \barwedge B$ 是线束 A 与 B 之间非透视的射影映射，设 P 是直线 $\varphi^{-1}(AB)$ 与 $\varphi(AB)$ 的交点，ξ 是过 P 而不过 A, B 的直线. 试证 ξ 与线束 A 与 B 中每一对 φ 的对应直线的交点是 ξ 上一个对合变换的对应点.

证 如图 2-2-2，设直线 ξ 与 AB 交于 P'，过 A 的直线 η 与 ξ 交于 Q，$\varphi(\eta)$ 与 ξ 交于 Q'，则

$$\xi(P, P', Q, \cdots) \barwedge A(AP, AB, \eta, \cdots) \barwedge B(AB, BP, \eta', \cdots) \barwedge \xi(P', P, Q', \cdots),$$

因此，$\xi(P, P', Q, \cdots) \barwedge \xi(P', P, Q', \cdots)$. 这一直线上的射影变换交换了对应点 P 与 P'，它是对合，Q' 的像是 Q.

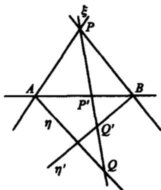


图 2-2-2

如果知道了双曲型对合的两个不动点，利用第四调和点的作法就可作出其他点的对应点. 例 1 中由非透视的射影映射 $\varphi: A \barwedge B$ 决定的过 P 的直线 ξ 上对合是双曲型的充要条件是：ξ 过 φ 的一对对应直线的交点. 这时 ξ 也过 φ 的另一对对应直线的交点，这两点是 ξ 上的对合的不动点. 在图 2-2-2 所示情形，Q, Q' 或 P, P' 关于这两点调和共轭. 在下一章，我们会证明如果例 1 中线束之间的射影映射是非透视的，那么它的对应直线的交点构成一条二次曲线. 直线 ξ 上对合实际上就是

第三章中性质 3.2.8 中讨论的由二次曲线诱导的对合，也见 §3.3，例 3.

例 2 试证，任意一条不通过完全四点形顶点的直线与完全四点形的三对对边的交点是此直线上一个对合的三对对应点.

证 如图 2-2-3，直线 ξ 与完全四点形 $ABCD$ 的三对对边的交点是 $P,P';Q,Q';R,R'$. 由 $P\to P',Q\to Q',R\to R'$ 决定了直线 ξ 上的一个射影变换，下面证明它是对合. 从

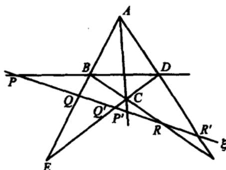


图 2-2-3

$\xi(Q,Q',P,R,\cdots)\overset{B}{\barwedge}CD(E,Q',D,C,\cdots)\overset{A}{\barwedge}\xi(Q,Q',R',P',\cdots)$，得 $R(QQ',PR)=R(QQ',R'P')=R(Q'Q,P'R')$. 这证明了由将 P,Q,R 分别映射成 P',Q',R' 定义的 ξ 上射影变换下，Q' 的对应点是 Q，由性质 2.2.3 可得此映射是对合.

例 2 中性质叫做 Desargues 对合定理. 利用 Desargues 对合定理，可以作出由两对点对 P,P' 与 Q,Q' 决定的对合的对应点 R，R'. 而下面的方法更具有一般性.

图 2-2-4 与图 2-2-5 给出了直线 ξ 上由两对点对 A,A' 与 B,B' 决定的对合的对应点的作法. 过直线 ξ 上点 A 作直线 η，选取不在 ξ 与 η 上点 P，由下列透视

$$\xi(A,B,A',B',\cdots)\overset{P}{\barwedge}\eta(A,B_1,A_1',B_1',\cdots)$$

$$\overset{B'}{\barwedge}PA'(A',V,A_1',P,\cdots)\overset{B_1}{\barwedge}\xi(A',B',A,B,\cdots)$$

合成的射影映射

$$\xi(A, B, A', B', \cdots) \barwedge \xi(A', B', A, B, \cdots)$$

是对合，读者可以按照上面的透视作出 ξ 上任一点的对应点.

图 2-2-4 中点对 A, A' 与 B, B' 互相分隔，可以证明这样的对合是椭圆型的；而图 2-2-5 中点对 A, A' 与 B, B' 不互相分隔，这时的对合是双曲型的，它有两个不动点.

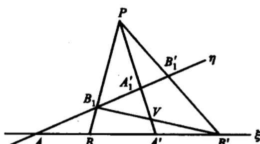


图 2-2-4

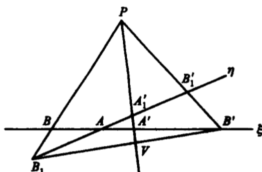


图 2-2-5

习题 2.2

1. 设 $\varphi: \rho\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 是直线 ξ 上的射影变换，试求 φ^2，φ^{-1}，并证明 $\{\varphi, I\}$ 构成群.

2. 试求直线 η 上的一个抛物型的射影变换 φ，使 $(2,1)$ 是它的一个不动

点，φ 把(2,3)变为(1,0)，并求点(2,4)的像.

3. 试证：直线上的双曲型或抛物型的射影变换总可以表示成两个透视之积.

4. 给出直线 ξ 上的双曲型对合的一个不动点 A 和一对对应点 P,P'，求作 ξ 上点 Q 的对应点与另一个不动点 B.

5. 求直线 ξ 上的对合，使它的不动点是(1,1)与(2,0).

6. 设 E 是不在三点形 ABC 的边上的点，$D=AE\times BC$，设 P 是 AB 上动点，$Q=PE\times AC$，$P'=QD\times AB$. 试证，直线 AB 上使 P 变为 P' 的映射是抛物型的射影变换.

7. 设 $\varphi:\xi \barwedge \xi$ 是抛物型的射影变换，A 是 φ 的不动点，求证，对任一点 $P\in\xi$，$R(A\varphi(P),P\varphi^2(P))=-1$.

8. 设 A,B,C 是直线 ξ 上不同的三点，如果射影变换

$$\varphi:\xi(A,B,C,\cdots)\barwedge \xi(B,C,A,\cdots),$$

则 φ 是椭圆型的.

9. 设 $\varphi:\xi\to\xi$ 是直线上的射影变换，A,B 是 ξ 上定点使得对于 ξ 上任一异于 A,B 的点 P 总有 $R(AB,P\varphi(P))=-1$，试证 φ 是对合，且 A,B 是它的两个不动点.

§2.3 直　　射

2.3.1 直射映射

定义 2.3.1 设 P^2 与 P'^2 是两个射影平面，$x=(x_1,x_2,x_3)$，$x'=(x'_1,x'_2,x'_3)$ 分别是其上点的射影坐标，如果映射 φ：$P^2\to P'^2$ 可以表示成

$$\rho\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

其中 ρ 是非零常数，矩阵 $A=(a_{ij})$ 非退化，则称 φ 是 P^2 到 P'^2 的射影映射，或直射映射，简称直射.

直射 φ 可简记为 $\varphi:\rho x'=Ax$. 与一维射影映射类似,直射 $\varphi_1:\rho x'=Ax$ 与 $\varphi_2:\rho x'=Bx$ 表示同一个直射的充要条件是这两个变换的系数矩阵 A 与 B 成比例. 由直射的定义,下面性质中(i)与(ii)显然成立.

性质 2.3.1 (i) 直射映射的逆映射也是直射,直射是一一的映射;

(ii) 如果 $\varphi_1:P^2\to P'^2$, $\varphi_2:P'^2\to P''^2$ 都是直射,则 $\varphi_2\varphi_1:P^2\to P''^2$ 也是直射,即直射映射的合成也是直射;

(iii) 直射保持射影平面上点与直线的结合关系.

证 下面证明(iii),这只要证明直射 $\varphi:P^2\to P'^2$ 把共线点变成共线点,不共线点变成不共线点. 这时 φ 将 P^2 上直线映成 P'^2 上直线,线束变成线束,而保持点与直线的结合关系. 设 P,Q,R 是射影平面 P^2 上任意三点, $p'=Ap$, $q'=Aq$, $r'=Ar$ 是它们的像 P',Q',R' 的坐标,利用矩阵乘法,可得

$$|p',q',r'|=|Ap,Aq,Ar|=|A(p,q,r)|=|A|\cdot|p,q,r|.$$

由于 $|A|\neq 0$, P',Q',R' 共线的充要条件是 P,Q,R 共线,所以映射 φ 保持点和直线的结合关系.

直射把共线的点映成共线的点,所以直射把直线映成直线;如果直射 φ 把 P^2 上直线 ξ,η 映成 P'^2 上直线 ξ',η',那么 φ 把点 $\xi\times\eta$ 映成 P'^2 上点 $\xi'\times\eta'$. 直射保持射影平面上点与直线的结合关系,它把射影平面上关于点与直线的结合关系的图形映成相对应的点与直线的结合关系构成的图形. 例如,它把射影平面上的三点形变成三点形,完全四点形变成完全四点形,它把线束变成线束. 直射 φ 诱导出射影平面 P^2 上直线到 P'^2 上直线的一个映射,下面推导它的表示式.

设 $\xi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 是 P^2 上任一直线,方程为

$$\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0, \text{即 } \xi^{\mathrm{T}}\cdot x=0.$$

如果点 $P(x)\in\xi$,则 $P'(x')\in\varphi(\xi)=\xi'(\xi_1',\xi_2',\xi_3')$,其中 $x'=$

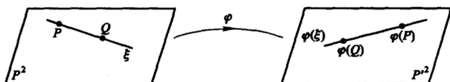


图 2-3-1

Ax. 以 $x=A^{-1}x'$ 代入 $\xi^{\mathrm{T}}\cdot x=0$，得 $P'(x')$ 满足的方程

$$\xi^{\mathrm{T}}A^{-1}x'=0,$$

这就是 ξ' 的方程. 所以存在非零常数 ρ 使得

$$\rho\xi'^{\mathrm{T}}=\xi^{\mathrm{T}}A^{-1}, \text{即 } \rho\xi'=(A^{-1})^{\mathrm{T}}\xi.$$

因为 ξ 可以是 P^2 上任一直线，$\rho\xi'=(A^{-1})^{\mathrm{T}}\xi$ 就是直射 φ 诱导的直线映射的表示式，称它是直射 φ 的线变换表示式. 下面把 φ 与它的逆映射 φ^{-1} 的点变换表示式与线变换表示式一起写出：

$$\varphi:\rho x'=Ax, \qquad \varphi:\rho\xi'=(A^{-1})^{\mathrm{T}}\xi$$

$$\varphi^{-1}:\rho x=A^{-1}x', \quad \varphi^{-1}:\rho\xi=A^{\mathrm{T}}\xi'.$$

具体计算时，A^{-1} 可用 A 的伴随矩阵 $\tilde{A}$ 代替，$\tilde{A}$ 是 A 的代数余子式矩阵的转置矩阵，$(A^{-1})^{\mathrm{T}}$ 可以用 A 的代数余子式矩阵代替.

下面的性质给出了确定直射的条件.

性质 2.3.2 射影平面 P^2 与 P'^2 上没有三点共线的四对对应点唯一确定一个直射映射.

证 分别以给定四点构成 P^2 与 P'^2 上射影坐标系，设直射

$$\varphi:\rho x'=Ax,\ \rho\neq 0,$$

则 φ 把 P^2 上坐标为 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)$ 的四点分别变成 P'^2 上坐标相同的四点，这样的映射 φ 是存在的，A 可以取单位矩阵. 唯一性也容易验证.

性质 2.3.3 设 $\varphi:P^2\to P'^2$ 是直射，ξ 是 P^2 上任一定直线，$\xi'=\varphi(\xi)$ 是它的像，如果限制 φ 于 ξ 上的点，则 φ 诱导出一维射影映射 $\varphi:\xi\barwedge\xi'$.

证 设 A,B,C 是 ξ 上不同的三点，D,E 是直线 ξ 外点，使得 D,E,C 共线(图 2-3-2)，它们在 φ 下的像记为 A',B',C',D',E'. 易见可以分别取 $\{A,B,D;E\}$ 与 $\{A',B',D';E'\}$ 为 P^2 与 P'^2 上的射影坐标系，这时

$$\rho x'=x.$$

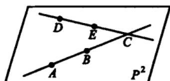


图 2-3-2

不难算得 C 与 C' 的坐标都是 $(1,1,0)$，
取 ξ 与 ξ' 上坐标系 $\{A,B;C\}$ 与 $\{A',B';C'\}$，则 ξ 上任一点 $P(x_1,x_2,0)$ 在坐标系 $\{A,B;C\}$ 下坐标为 (x_1,x_2)，它的像 $P'(x_1,x_2,0)$ 在坐标系 $\{A',B';C'\}$ 下也是 (x_1,x_2)，因此 φ 限制于 ξ 上点在 ξ 与 ξ' 的上述坐标下表示式是

$$\rho\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\ \rho\neq0.$$

所以 $\varphi:\xi\to\xi'$ 是射影映射.

这性质也可用 φ 限制于 ξ 是一一的，并且是保交比的来证明.

与性质 2.3.3 同样的结论对 P^2 与 P'^2 中线束也成立. 如果直射 φ 把点 P 映成 P'，则 φ 把过 P 的直线映成过 P' 的直线. φ 限制于线束 P，诱导出线束 P 与线束 P' 的一维射影映射. 进一步，如果 $P^2=P'^2$，A 是直射 φ 的不动点，φ 限制于线束 A 决定线束 A 的一个一维射影变换.

性质 2.3.1 告诉我们，直射保持点和直线的结合关系，且是一一的，实际上这也是直射的充分条件，即可以证明：

射影平面之间一个一一的，保持点和直线结合关系的映射是直射.

证明的方法大致如下，设 $\varphi:P^2\to P'^2$ 是这样一个映射，则 φ

把P^2上直线映成P'^2上直线，利用第四调和点作法及φ保持结合关系可以证明φ把P^2上任一调和点列变成P'^2上调和点列.因此，φ限制于P^2上直线ξ得直线ξ与直线$\xi'=\varphi(\xi)$之间的一一的，并且保持调和点列的映射，由§2.1中说明，它是ξ与ξ'之间的一个射影映射.然后可以证明φ是射影映射.

在§1.1定义的拓广平面之间的中心射影是一一的，并且保持结合关系的，所以它们是射影映射.类似一维射影映射，可以证明一般的直射可分解成中心射影的乘积.

在第三章中，我们还要定义射影平面上把点变为直线的映射，叫对射.由于射影平面上点及直线的集合都是二维的，我们把直射与对射统称为二维射影映射.

2.3.2 直射变换

如果φ是射影平面P^2到自身的直射映射，则称φ是P^2上直射变换，简称直射.

定理 2.3.4 射影平面上所有的直射的集合构成群，称为直射变换群.

按照 Klein 的变换群观点，平面射影几何是要研究射影平面上在直射变换下不变的性质，称为射影性质.按照这一观点，点和直线的结合关系是射影性质.实际上结合关系是基本的射影性质，它有着丰富的内容.根据性质 2.3.3，共线四点(或共点四直线)的交比在直射下不变，交比是射影不变量.

下面讨论直射的不动点和不动直线，以下出现的直射$\varphi:\rho x'=Ax$是在射影平面上一个取定的射影坐标系下的表示式.

性质 2.3.5 直射变换至少有一个不动点和一条不动直线.

证 设$\varphi:\rho x'=Ax$是直射，$P(x)$是φ的不动点的充要条件是存在非零常数ρ使

$$\rho x=Ax,\quad 即\quad (A-\rho I)x=0,$$

其中I表示三阶单位矩阵.由于x_1,x_2,x_3不全为0，因此有$|A-$

$\rho I|=0$,这是一个 ρ 的三次方程,它至少有一个实根,设为 ρ_0($\rho_0 \neq 0$,否则 $|A|=0$).从方程

$$(A-\rho_0 I)x=0$$

可得非零解 x,它表示直射 φ 的一个不动点.

下面讨论不动直线,$\varphi:\rho\xi'=(A^{-1})^{\mathrm{T}}\xi$ 是直射 φ 的直线变换表示式,如果 η 是一条不动直线,则有

$$\rho\eta=(A^{-1})^{\mathrm{T}}\eta, \quad 即 \quad A^{\mathrm{T}}\eta=\rho^{-1}\eta.$$

以 ρ 代替 ρ^{-1} 得 $(A^{\mathrm{T}}-\rho I)\eta=0$,所以

$$|A^{\mathrm{T}}-\rho I|=|A-\rho I|=0$$

有非零解 ρ 是存在不动直线的必要条件.类似不动点情况,它也是充分的.因此任一直射至少有一个不动点和一条不动直线.

证明中方程 $|A-\rho I|=0$ 叫做直射 $\varphi:\rho x'=Ax$ 的特征方程,它的根叫特征根.容易证明 φ 的特征方程与射影平面上坐标选取无关.如果 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$ 是 P^2 上另一射影坐标,则有坐标变换公式

$$\rho x=B\bar{x},$$

代入 $\varphi:\rho x'=Ax$ 的两边得 φ 在坐标 $\bar{x}$ 下表示式

$$\varphi:\rho\bar{x}'=B^{-1}AB\bar{x},$$

这时的特征方程 $|B^{-1}AB-\rho I|=0$ 就是 $|A-\rho I|=0$.性质 2.3.5 的证明也给出了不动点与不动直线的求法.

对于直射 $\varphi:\rho x'=Ax$,首先解特征方程

$$|A-\rho I|=0.$$

对于它的每一个实特征根 ρ_i,由方程组

$$(A-\rho_i I)x=0$$

可解得对应特征根的不动点,如果矩阵 $A-\rho_i I$ 的秩是 2,则对应 ρ_i 有一个不动点;如果 $A-\rho_i I$ 的秩是 1,则不动点构成一条直线;如果 $A-\rho_i I$ 的秩为 0,这时 φ 是恒同,所有的点都是不动点.

而由 $(A^{\mathrm{T}}-\rho_i I)\xi=0$ 或 $\xi^{\mathrm{T}}(A-\rho_i I)=0$ 可得不动直线.

直射的不动点与不动直线有一定关系.要注意的是,如果 η 是直射 φ 的不动直线,那么对于每一点 $Q\in\eta$,必有 $\varphi(Q)\in\eta$,但不一定有 $\varphi(Q)=Q$.如果 ξ,η 是直射 φ 的两条不动直线,它们的交点 $\xi\times\eta$ 一定是 φ 的不动点.

例1 设 $\varphi:\rho x'=Ax$ 是直射,其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&2\end{pmatrix}$,它的特征方程是

$$(\rho-1)^2(\rho-2)=0,$$

特征根 $\rho_1=1$(二重根),$\rho_2=2$.由 $\rho_1=1$ 得 $(A-I)x=0$,即

$$\begin{cases}x_2+2x_3=0,\\3x_3=0,\\x_3=0,\end{cases}$$

得不动点 $A(1,0,0)$.由 $\rho_2=2$ 得 $(A-2I)x=0$ 即

$$\begin{cases}-x_1+x_2+2x_3=0,\\-x_2+3x_3=0,\end{cases}$$

得不动点 $B(5,3,1)$.由 $\rho_1=1$,$(A^{\mathrm T}-I)\xi=0$ 或 $\xi^{\mathrm T}(A-I)=0$,即

$$\begin{cases}\xi_1=0,\\2\xi_1+3\xi_2+\xi_3=0,\end{cases}$$

得不动直线 $\xi(0,1,-3)$,即 $x_2-3x_3=0$.由 $\rho_2=2$ 得不动直线 $\eta:x_3=0$.

在例1中,$A(1,0,0)$,$B(5,3,1)$是直射 φ 的所有不动点,$\xi=AB:x_2-3x_3=0$,$\eta:x_3=0$ 是不动直线,其中 A 是直线 ξ 与 η 的交点.直射 φ 把过 A 的直线仍变成过 A 的直线,φ 限制于线束 A 决定的一个一维射影变换.直线 ξ 与 η 是这一射影变换不变元素,并且它没有其它不动直线,所以 φ 限制于线束 A 是一个双曲型的射影变换.而 φ 限制于过不动点 B 的直线也决定线束 B 的一个一

维射影变换，此变换只有 ξ 是它的不变元素，这是一个抛物型的变换. 同样讨论知道，φ 限制于直线 ξ 是一个双曲型的射影变换；限制于直线 η 是一个抛物型的变换.

例 2 试求 P^2 上使直线 $\alpha: x_3=0$ 是不动直线的直射的一般表示式.

解 法 1)：设 $\varphi: \rho x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i$, $i=1,2,3$, 是这样的直射，$|a_{ij}|\neq 0$，对任意 $P(x_1,x_2,0)\in\alpha$ 应有 $\varphi(P)\in\alpha$，即

$$\rho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = 0,$$

由于 x_1, x_2 任意，$a_{31}=a_{32}=0$，所以这样的直射 φ 的一般形式是

$$\rho\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0.$$

法 2)：以 $\alpha: x_3=0$ 代入 $\rho\xi = A^{\mathrm{T}}\xi$，同样可得 $a_{31}=a_{32}=0$.

例 3 试求使直线 $\alpha: x_3=0$ 上每一点不动的直射.

解 要使 α 上每一点不动，只要使 α 上三个点不动即可，设 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(1,1,0)$ 是 φ 的不动点，代入 $\varphi: \rho x' = Ax$ 得

$$\begin{cases} a_{11}=\rho_1, \\ a_{21}=0, \\ a_{31}=0, \end{cases}\quad \begin{cases} a_{12}=0, \\ a_{22}=\rho_2, \\ a_{32}=0, \end{cases}\quad \begin{cases} a_{11}+a_{12}=\rho_3, \\ a_{21}+a_{22}=\rho_3, \\ a_{31}+a_{32}=0, \end{cases}\quad \rho_1\rho_2\rho_3\neq 0.$$

因此，$a_{21}=a_{31}=a_{12}=a_{32}=0$，$a_{11}=a_{22}$. 使 $\alpha: x_3=0$ 上每一点都不动的直射是

$$\rho\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ a_{11}a_{33}\neq 0.$$

2.3.3 调和同调变换

直射变换保持点与直线的结合关系，下面利用这一性质讨论一类特殊的直射，它在讨论双曲几何时将起重要的作用.

引理 2.3.6 设 φ 是射影平面上的直射，使直线 α 上每一点都不动，且使不在直线 α 上的点 S 也不动，那么对任意不在 α 上也异于 S 的点 P，总有

$$R(SA, P\varphi(P)) = k,$$

其中 $A = SP \times \alpha$，k 是常数.

证 如图 2-3-3，设 P, Q 是不在 α 上的任意两点，S, P, Q 也不共线，记 $A = SP \times \alpha$，$B = SQ \times \alpha$，$C = PQ \times \alpha$. 由于 S, P, A 共线，S, A 是不动点，点 $P' = \varphi(P)$ 仍在直线 SA 上，同理 $Q' = \varphi(Q)$ 在 SB 上. 又因为 P, Q, C 共线，$P', Q', C = \varphi(C)$ 也共线，因此

$$R(SA, PP') = R(SB, QQ').$$

对直线 SA 上任意一点 R，也可得 $R(SA, RR') = R(SB, QQ')$，引理成立.

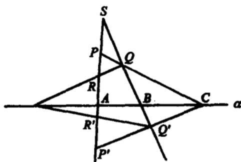


图 2-3-3

如果引理 2.3.6 中 φ 不是恒同，常数 $k \neq 1$. 因此，只要 P 不在直线 α 上也异于 S，则 $\varphi(P) \neq P$.

性质 2.3.7 设 α 是 P^2 上一直线，S 是 α 外一点，k 是不等于 $0,1,\infty$ 的常数.那么存在唯一的直射 φ，使得 S 及 α 上每一点都不动，对射影平面上任一不在 α 上也异于 S 的点 P，都有 $S,P,\varphi(P)$ 共线，且 $R(SA,P\varphi(P))=k$，其中 $A=SP\times\alpha$.

证 取 P^2 上射影坐标使 $S(0,0,1)$，$\alpha: x_3=0$.由例 3 可知，使 α 上每一点不动的直射是

$$\varphi:\rho\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&0&a_{13}\\0&a_{11}&a_{23}\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ a_{11}a_{33}\neq 0.$$

由 $\varphi(S)=S$ 又可得 $a_{13}=a_{23}=0$.取 $P(0,1,1)$，则 $\varphi(P)=P'(0,a_{11},a_{33})$，$A=SP\times\alpha$ 的坐标是 $(0,1,0)$，因此

$$R(SA,PP')=\frac{a_{33}}{a_{11}}=k.$$

取 $a_{11}=1$，则 $a_{33}=k$.由引理 2.3.6，对任意 Q

$$R(SB,Q\varphi(Q))=k,B=SQ\times\alpha.$$

所以存在唯一的满足性质 2.3.7 条件的直射

$$\varphi:\rho\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

性质 2.3.7 中直射 φ 称为同调变换；或透视变换，S 叫透视中心，α 是透视轴，k 是变换的特征常数.当特征常数 $k=-1$ 时，φ 称为调和同调变换.

性质 2.3.8 调和同调变换是对合.

证 利用性质 2.3.7 中记号，调和同调变换可以表示成 $\varphi:\rho x'=Ax$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，由 $A^2=I$，知道 $\varphi^2=I$，因此 φ 是对合.

性质 2.3.9 射影平面上对合的直射是调和同调变换

证 设 φ 是对合的直射，它不是恒同，可取 φ 的一对对应点 A, A'，直线 AA' 是 φ 的不动直线. 再在直线 AA' 外取一对对应点 B, B'，这样 φ 的两对对应点 A, A', B, B' 无三点共线. 如图 2-3-4；可得点 C, D, F, G, H. A, A', G, F 与 B, B', H, F 都是调和点列. 设 φ' 是以 CD 为轴，F 为中心的调和同调变换，由性质 2.3.8，φ' 是对合. 显然 $\varphi'(A) = A'$，$\varphi'(B) = B'$，因此直射 φ 与 φ' 都把无三点共线的四点 A, A', B, B' 分别变为 A', A, B', B，由此可知 $\varphi = \varphi'$. 所以 φ 是调和同调变换.

由于 $\varphi = \varphi'$，F 及 CD 上每一点都是 φ' 的不动点. 自然也是 φ 的不动点. 这可以直接证明如下

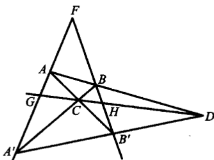


图 2-3-4

如图 2-3-4，直射 φ 把四点 A, A', B, B' 分别变为 A', A, B', B，要证明 F 及 CD 上每一点都是 φ 的不动点. 因为 AA' 是 φ 的不动直线，$\varphi(F)$ 仍在 AA' 上；同理 $\varphi(F)$ 也在 BB' 上，F 是 φ 的不动点. 记 $G' = \varphi(G)$，点 G' 仍在 AA' 上，由

$$R(AA', GF) = R(A'A, G'F) = -1,$$

得 $R(AA', GF) = R(AA', G'F) = -1$，所以 $G = G'$ 也是 φ 的不动点. 同理 H 是 φ 的不动点，GH 是 φ 的不动直线. 再利用 $C = AB' \times A'B$ 可证 C 也是 φ 的不动点. G, H, C 是三个不动点，所以 GH 上每一点都是 φ 的不动点. 这证明 φ 是以 GH 为轴，F 为中心

的调和同调变换.

如果 φ 是射影平面上的同调变换,S 是透视中心,那么过 S 的每一条直线都是 φ 的不动直线.通过下面的例子我们进一步讨论这一特性与同调变换的关系.

例4 设 φ 是直射,且存在点 S,使得对任意 $P\in P^2$,三点 P, $\varphi(P)$,S 共线,试证存在直线 α,使得 α 上每一点都是 φ 的不动点.

证 假设 φ 不是恒同.易知过 S 的每一直线都是 φ 的不动直线,因此 S 是 φ 的不动点.任取 P,Q 使 $P,Q,P'=\varphi(P)$ 不共线,记 $Q'=\varphi(Q)$,$A=PQ\times P'Q'$.按照题中直射 φ 的定义,AS 是 φ 的不动直线,另一方面,A 也是直线 PQ 上点,故 $\varphi(A)$ 是 $P'Q'=\varphi(PQ)$ 与 SA 的交点,$\varphi(A)=A$.另取不与 P,Q,P',Q' 共线的点 R,类似可得另一个不动点 B,且 S,A,B 是相异三点.下证 $\alpha=AB$,分两种情况讨论.

(1) 如果 S,A,B 共线,则 $\alpha=AB$ 上每一点都不动(图 2-3-5(a)).可以证明这时除了直线 α 上点,φ 没有其他不动点,否则 φ 是恒同,这样的映射叫做射影平面上的扩张.

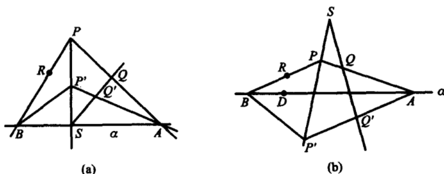


图 2-3-5

(2) 如果 S 不在直线 AB 上,如图 2-3-5(b),设 D 是 $\alpha=AB$ 上异于 A,B 的点,则 $\varphi(D)$ 既在 α 上,又在 SD 上,因此

$\varphi(D)=D$也是不动点,即 α 上每一点都是不动点.由引理 2.3.6,这时 φ 是射影平面上的同调变换.

2.3.4 直射与坐标变换的关系

射影平面上的坐标变换与直射变换的表示式形式上是一样的,表示式

$$\rho\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},|A|=|a_{ij}|\neq0,$$

可以表示下面两种情况:

(1) $\rho x'=Ax$ 是射影平面上的坐标变换,它给出了射影平面上同一点在两个不同的坐标系下的坐标 x 与 x' 之间关系;

(2) $\rho x'=Ax$ 也可以是射影平面上某个直射的表示式,这时 x,x' 分别表示射影平面上点与它在直射下像的坐标.这时 x 与 x' 可以是同一坐标系下的坐标,也可以是不同坐标系下的坐标,这要根据具体情况判断.

例 5 设 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 是射影平面上点的射影坐标,二次曲线 Γ_1 与 Γ_2 在坐标下的方程分别是

$$\Gamma_1:x_1^2+x_2^2-x_3^2=0,\ \Gamma_2:x_1x_3-x_2^2=0.$$

在非齐次坐标 $x=\dfrac{x_1}{x_3},y=\dfrac{x_2}{x_3}$ 下,它们分别成为(见图 2-3-6)

$$\Gamma_1:x^2+y^2=1,\ \Gamma_2:y^2=x.$$

设 $x'=(x_1',x_2',x_3')$ 是射影平面上另一坐标系,同一点的坐标 x 与 x' 的关系是

$$\rho\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&2\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix},$$

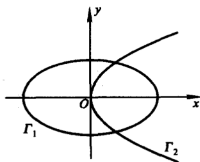


图 2-3-6

这是坐标变换公式.代入 Γ_1 的方程得

$$(x_1',x_2',x_3')\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&2\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=0,$$

化简后得 Γ_1 在坐标 x' 下的方程

$$x_2'^2-x_1'x_3'=0.$$

类似得到二次曲线 Γ_2 在坐标 x' 下的方程

$$x_1'^2+4x_1'x_2'+2x_1'x_3'-4x_2'x_3'-4x_3'^2=0.$$

如图 2-3-7,$\{P_1,P_2,P_3;E\}$ 是决定例 5 中坐标 x 的坐标系,其中 $P_1(1,0,0),P_2(0,1,0),P_3(0,0,1),E(1,1,1)$.点 $P_1'(1,0,1),P_2'(1,1,1),P_3(0,1,1),E'(3,4,5)$是决定例 5 中坐标 x'的坐标系的基点与单位点($(1,0,1)$是 P_1' 在坐标系$\{P_1,P_2,P_3;E\}$下的坐标,其余类似).不难验证 P_1,P_3,E 是Γ_2 上点,且 P_1P_2,P_3P_2 是 Γ_2 的切线.$P_2'=E,P_1'=P_1P_3\times P_2E,P_3'=P_2P_3\times P_1E$;点 P_1',P_3',E'是Γ_1 上点,$P_1'P_2',P_3'P_2'$ 是 Γ_1 的切线.所以,四点 P_1',P_2',P_3',E'与Γ_1 的关系和 P_1,P_2,P_3,E 与Γ_2 的关系相同.由例 5 我们知道,Γ_1 在坐标系$\{P_1',P_2',P_3';E'\}$下的方程与Γ_2 在坐标系$\{P_1,P_2,P_3;E\}$下的方程相同,都是

$$x_2^2-x_1x_3=0.$$

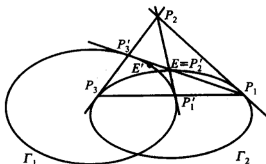


图 2-3-7

例 5 中二次曲线 Γ_1 与 Γ_2 没有变,变化的是射影平面上的坐标系.

例 6 设 $\varphi:\rho x' = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$ 是射影平面上直射,x 与 x' 是射影平面上同一坐标系下点 P 与 $\varphi(P)$ 的坐标.

$$\Gamma_1: x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,\ \Gamma_2: x_1 x_3 - x_2^2 = 0$$

是射影平面上两条二次曲线,φ 的逆变换是

$$\varphi^{-1}: \rho x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} x'.$$

二次曲线 Γ_1 在直射 φ 下成为

$$x_2'^2 - x_1' x_3' = 0.$$

此即 Γ_2,因此 Γ_1 在 φ 下的像是 Γ_2.同样可算得 Γ_2 在 φ 下成为

$$\Gamma_3: x_1^2 + 4x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - 4x_2 x_3 - 4x_3^2 = 0.$$

所以在直射 φ 下

$$\Gamma_1 \xrightarrow{\varphi} \Gamma_2 \xrightarrow{\varphi} \Gamma_3.$$

例 5 与例 6 决定坐标 x 的坐标系都是 $\{P_1, P_2, P_3; E\}$.结合例 5 与例 6 知道,二次曲线 Γ_1 在标架 $\{P_1', P_2', P_3'; E'\}$ 下的方程是 $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$,它在直射 φ 下的像 $\Gamma_2 = \varphi(\Gamma_1)$ 在标架 $\{P_1, P_2, P_3; E\}$ 下,方程仍是 $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$.同样,Γ_1 在标架 $\{P_1, P_2, P_3; E\}$ 下是 $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$;可证明 Γ_2 在标架 $\{\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3); \varphi(E)\}$ 下的方程仍是 $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.一般地下面的结论成立.

设 ψ 是射影平面上直射变换,$\{T_1, T_2, T_3; F\}$ 是射影坐标系,那么 $\{\psi(T_1), \psi(T_2), \psi(T_3); \psi(F)\}$ 也是射影坐标系.对于射影平面上任一点 P,P 在坐标系 $\{T_1, T_2, T_3; F\}$ 与 $\psi(P)$ 在坐标

系$\{\psi(T_1),\psi(T_2),\psi(T_3);\psi(F)\}$下的坐标是一样的. 设 P 在坐标系$\{T_1,T_2,T_3;F\}$下坐标是 $x=(x_1,x_2,x_3)$,在坐标系$\{\psi(T_1),\psi(T_2),\psi(T_3);\psi(F)\}$下的坐标是 $x'=(x_1',x_2',x_3')$,假设这两种坐标之间的坐标变换是

$$\rho x'=Ax.$$

根据上面的讨论,设 P 在坐标系$\{T_1,T_2,T_3;F\}$下坐标为 x,则 $\psi(P)$关于坐标系$\{\psi(T_1),\psi(T_2),\psi(T_3);\psi(F)\}$的坐标仍是 x. 设 $\psi(P)$在坐标系$\{T_1,T_2,T_3;F\}$下坐标是 x',由上面讨论可知,这时有 $\rho\neq0$,使 $\rho x=Ax'$. 因此直射 ψ 在坐标系$\{T_1,T_2,T_3;F\}$下表示式是

$$\psi:\rho x'=A^{-1}x.$$

这些关系见图 2-3-8.

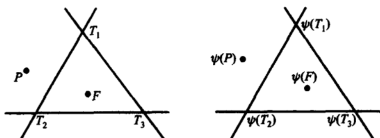


图 2-3-8

习题 2.3

1. 求使 $A(1,0,1)$,$B(0,1,1)$,$C(1,1,1)$,$D(0,0,1)$依次变为 $A'(1,0,0)$,$B'(0,1,0)$,$C'(0,0,1)$,$D'(1,1,1)$的直射变换.

2. 求直射变换 φ,使直线 $\epsilon(1,1,1)$上每一点都是不动点.

3. 直射变换 φ 分别把直线 $\xi:x_1-x_2=0$ 变为 $\xi':x_1'-x_3'=0$,$\eta:x_2+2x_3=0$ 变为 $\eta':x_2'-x_3'=0$,$\zeta:x_1+x_2+x_3=0$ 变为 $\zeta':x_1'=0$;并且 φ 把点 $P(1,-1,1)$变为 $P'(2,1,3)$. 试求 φ 的表示式.

4. 试求直射 $\varphi:\begin{cases}\rho x_1' = x_1 + x_2,\\ \rho x_2' = x_2,\\ \rho x_3' = x_3\end{cases}$ 的不动点和不动直线，并判断 φ 限制于不动直线所得射影变换的类型.

5. 求直射 $\varphi:\rho x' = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 8 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}x$ 的不动点和不动直线，并判断 φ 限制于每一不动点决定的线束中的射影变换的类型.

6. 设两个三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 关于 S 成透视，S 不在两个三点形的透视轴上，试证存在同调变换 φ. 使 A,B、C 分别变成 A',B',C'.

7. 试证直射 $\varphi:\rho x' = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}x$ 是调和同调变换，并找出同调变换的中心与轴.

§2.4 欧氏平面上的仿射变换

下面给出一些射影变换在欧氏几何中的运用，进一步的讨论见第四章.

设(x,y)是欧氏平面上直角坐标，(x_1,x_2,x_3)是对应的齐次坐标，$x=\dfrac{x_1}{x_3}$，$y=\dfrac{x_2}{x_3}$. 拓广欧氏平面上无穷远直线是 $a_\infty: x_3=0$. 如果 φ 是拓广平面上把无穷远直线变为无穷远直线的直射，它把拓广平面上的无穷远点变成无穷远点，把普通点变成普通点，因此 φ 决定欧氏平面上的一个变换. 由上节例 2 知道，这样的 φ 在齐次坐标下表示式具有下列形式：

$$\begin{cases}\rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\\ \rho x_3' = a_{33}x_3,\end{cases}\quad a_{33}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

以第三式 $\rho x'_3 = a_{33}x_3$ 分别除以前两式,记 $x' = \frac{x'_1}{x'_3}, y' = \frac{x'_2}{x'_3}, c_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{33}}, i,j = 1,2, b_1 = \frac{a_{13}}{a_{33}}, b_2 = \frac{a_{23}}{a_{33}}$,得 φ 的直角坐标表示式

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + b_1, \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + b_2. \end{cases}$$

它是欧氏平面上的一个变换仍记为 φ. 点 $P(x,y)$ 的像 $\varphi(P) = P'(x',y')$ 由上式确定,这样的变换叫做欧氏平面上的*仿射变换*. 易见,仿射变换表示式中系数矩阵 (c_{ij}) 是非退化的, b_1, b_2 可以是任意常数.

另一方面,任意给定非退化矩阵 $C = (c_{ij}), i,j = 1,2$, 常数 b_1, b_2,则有唯一的仿射变换以 C 为系数矩阵, b_1, b_2 为变换的常数.

按照定义,仿射变换是一种特殊的直射,它具有直射的性质. 易见,仿射变换是正交变换的重要推广,它既包含了平移、旋转、反射等保持点之间距离与直线的夹角的正交变换,也包含了形如

$$\begin{cases} x' = \lambda x, \\ y' = \lambda y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \lambda x, \\ y' = \mu y, \end{cases}$$

的变换, $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$, 前者叫相似变换,后者叫伸缩变换. 仿射变换的全体构成一个群,叫*仿射变换群*. 容易知道,仿射变换一般来说不保持两点间距离与两直线的夹角. 例如, $\lambda \neq \mu$ 时伸缩变换不保持两点间距离与两直线的夹角. 所以欧氏平面上的许多性质在仿射变换下要改变. 但仿射变换仍可以运用于欧氏几何,用来解决一些欧氏几何的问题.

性质 2.4.1 仿射变换把共线点变成共线点,把相交直线变成相交直线,平行直线变成平行直线.

证 由于直射保持点与直线的结合关系,仿射变换也保持点与直线的结合关系. 如果 ξ 与 η 是欧氏平面上两平行线,它们在拓广平面上交于无穷远点,所以 ξ 与 η 在仿射变换下的像直线交点

仍在无穷远直线上，也就是说，ξ,η 在仿射变换下的像仍是平行直线．而如果 ξ,η 交于普通点，则仿射变换下，ξ,η 的像仍交于普通点．

由此性质可知，仿射变换把欧氏平面上平行四边形变成平行四边形，梯形变成梯形．

性质 2.4.2 仿射变换由不共线的三对对应点唯一确定．

证 设 A,B,C 是欧氏平面上不共线的三点，如图 2-4-1，设 P_∞，Q_∞，R_∞ 分别是三角形 ABC 三边上的无穷远点．B,C，P_∞,Q_∞ 是拓广平面上无三点共线的四点．如果 A',B',C' 是欧氏平面上另外不共线的三点，类似可得 $P'_\infty,Q'_\infty,R'_\infty$．由 $B\to B'$，$C\to C'$，$P_\infty\to P'_\infty$，$Q_\infty\to Q'_\infty$ 确定一个直射 φ．由于 φ 把 P_∞,Q_∞ 分别变为 P'_∞,Q'_∞，φ 把无穷远直线变成无穷远直线．不难证明 φ 把 A 变成 A'．这样的仿射变换的唯一性，是要证明如果直射 φ 把 A,B,C 分别变为 A',B',C' 且保持无穷远直线不变，则 φ 一定把 P_∞,Q'_∞ 分别映成 P'_∞,Q'_∞，这也容易证明．

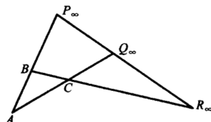


图 2-4-1

利用这一性质容易证明欧氏平面上任意两个三角形中的一个可以在仿射变换下变为另一个．特别，任意一个三角形可以经仿射变换变成等边三角形，或直角三角形．由此证明，任意两个平行四边形可以在仿射变换下把一个变成另一个．特别，任意一个平行四边形可在仿射变换下变成正方形．但是，对欧氏平面上任意两个梯形，不一定有仿射变换把其中一个变为另一个．读者可以找出两个梯形存在仿射变换把其中一个变为另一个的条件．

性质 2.4.3 （ⅰ）仿射变换保持共线点之间线段的长度之比；

（ⅱ）仿射变换保持两图形的面积之比.

证　（ⅰ）设 A,B,C 是欧氏平面上共线三点，P_∞ 是该直线上的无穷远点，它们在仿射变换 φ 下的像分别记为 A',B',C',P'_∞，由于 φ 保持交比

$$R(AB,CP_\infty)=R(A'B',C'P'_\infty).$$

利用§1.5结果，这时 $\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}$. 如果 A,B,C,D 是共线四点，利用 $\frac{AB}{CD}=\frac{AB}{CB}\cdot\frac{BC}{DC}$ 就可以证明

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'},$$

其中 A',B',C',D' 分别是 A,B,C,D 的像.

（ⅱ）只要证明仿射变换保持三角形的面积之比，设 $P_i(x_i,y_i)$，$i=1,2,3$，是不共线的三点，记

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}.$$

则 $\Delta P_1P_2P_3$ 的面积是 $|\Delta|$. 改写仿射变换 φ

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & b_1\\ c_{21} & c_{22} & b_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}.$$

记 $\varphi(P_i)=P'_i(x'_i,y'_i)$，利用矩阵乘法不难知道

$$\Delta'=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x'_1 & x'_2 & x'_3\\ y'_1 & y'_2 & y'_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}c_{11} & c_{12} & b_1\\ c_{21} & c_{22} & b_2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}.$$

$\Delta P'_1P'_2P'_3$ 的面积是 $|\Delta'|$，显然

$$\frac{\Delta'}{\Delta}=\begin{vmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix}.$$

因此 $\Delta P_1P_2P_3$ 与 $\Delta P_1'P_2'P_3'$ 的面积之比是常数，即仿射变换保持面积之比.

例 1 如图 2－4－2，设 D,E,F 分别是 $\triangle ABC$ 三边上的点，且 $AD:AB=BE:BC=CF:CA=1:n$ $(n\geqslant 2)$. 记 $P=AE\times DC$，$Q=BF\times AE$，$R=CD\times BF$，试求

(1) $CR:RP:PD$，$AP:PQ:QE$，$BQ:QR:RF$；

(2) $\triangle ABC$ 与 $\triangle PQR$ 的面积之比.

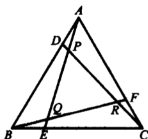


图 2－4－2

证 由性质 2.4.1，2.4.2，2.4.3，不妨假设 $\triangle ABC$ 是等边三角形，利用对称性，不难知道 $\triangle PQR$ 也是等边三角形. 从余弦定理可得

$$AE^2=\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)AB^2.$$

不妨设 $AB=BC=CA=1$，得 $AE=BF=CD=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}}$. 利用 $\triangle ABE$ 与 $\triangle APD$ 相似，可得

$$AP=AD\cdot\frac{AB}{AE}=\frac{1}{nAE},\ DP=AD\cdot\frac{BE}{AE}=\frac{1}{n^2AE},$$

因此 $PQ=QR=RP=AE-AP-QE=\frac{n^2-2n}{n^2+1-n}AE=\frac{n-2}{nAE}$，因而

$$AP:PQ:QE=1:(n-2):\frac{1}{n}.$$

同样，

$$CR:RP:PD=BQ:QR:RF=1:(n-2):\frac{1}{n}.$$

$\triangle ABC$ 与 $\triangle PQR$ 的面积之比是 $AB^2:PQ^2=(n^2+1-n):(n-2)^2$.

如果 $n=2$，则 D,E,F 分别是 $\triangle ABC$ 三边上的中点，这时

P,Q,R 三点重合，是$\triangle ABC$ 的重心，$AP:PE=2:1$. 如果 $n=3$，则 D,E,F 分别是$\triangle ABC$ 三边上的三等分点，这时 $AP:PQ:PD=3:3:1$.

还可以证明三个三角形$\triangle ABC$，$\triangle DEF$ 与$\triangle PQR$ 的重心重合.

例 2 证明椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积是 $ab\pi$，$a,b>0$.

证 通过仿射变换$\begin{cases} x'=\frac{1}{a}x, \\ y'=\frac{1}{b}y, \end{cases}$ 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 变成为圆 $x'^2+y'^2=1$. 如图 2－4－3，三点 $A(a,0)$，$B(0,b)$，$O(0,0)$的像分别是 $A'(1,0)$，$B'(0,1)$，$O'(0,0)$. $\triangle ABO$ 与$\triangle A'B'O'$的面积分别是$\frac{1}{2}ab$ 与$\frac{1}{2}$，而圆 $x'^2+y'^2=1$ 的面积为 π. 由性质 2.4.3，可知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积是 $ab\pi$.

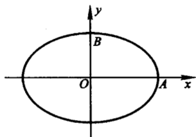


图 2－4－3

性质 2.4.4 仿射变换把二次曲线变为二次曲线，把二次曲线的切线变为切线.

证 欧氏平面上二次曲线总可以表示成

$$(x,y,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0.$$

在仿射变换 φ 下，二次曲线成为

$$(x',y',1)\begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}=0,$$

其中(d_{ij})是$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & b_1 \\ c_{21} & c_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$的逆矩阵，自然有 $d_{31}=d_{32}=0$. 因此，二次曲线在仿射变换下的像仍是二次曲线.

二次曲线的切线是与二次曲线交于二重点的直线，因此，二次曲线的切线在仿射变换下仍变成切线.

还可以证明仿射变换把双曲线，抛物线，椭圆分别变为双曲线，抛物线，椭圆，详细讨论见第四章.

例 3 如图 2-4-4，$\triangle ABC$ 外切于一椭圆，切点分别是 D，E，F，试证，AE，CD，BF 交于一点.

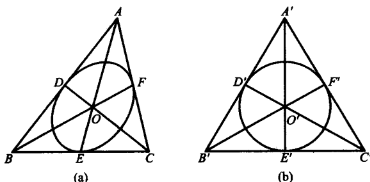


图 2-4-4

证 利用仿射变换把椭圆变成圆，椭圆外切$\triangle ABC$ 变成圆外切$\triangle A'B'C'$，切点分别变成 D'，E'，F'. AE，CD，BF 交于一点的充要条件是$A'E'$，$C'D'$，$B'F'$交于一点. 在$\triangle A'B'C'$中，$A'D'=A'F'$，$B'D'=B'E'$，$C'E'=C'F'$. 利用 Ceva 定理(见 §1.5 例 9)，从

$$\frac{A'D'}{D'B'}\cdot\frac{B'E'}{E'C'}\cdot\frac{C'F'}{F'A'}=1$$

知道 $A'E'$，$C'D'$，$B'F'$交于一点，所以 AE，CD，BF 也交于一点.

仿射变换在把圆变成椭圆的同时，把圆心变成椭圆内一点，这

一点具有圆心类似的性质:过这一点的所有弦以该点为中点,这点叫椭圆的中心;过椭圆中心的直线称为椭圆的直径.利用仿射变换,也容易知道椭圆的平行弦的中点轨迹是直径.如果图 2-4-4(a)中 E 是 BC 的中点,则由第四调和点作法,这时 DF 平行于 BC.经过仿射变换(图 2-4-4(b)),E'也是$B'C'$的中点,$D'F'$平行于$B'C'$.易见,这时$\triangle A'B'C'$中$A'B'=A'C'$,所以 $A'E'$过圆心,从而是圆的直径,$A'E'$也是圆的平行于$B'C'$的弦的中点轨迹.这证明了:

如果$\triangle ABC$ 外切于椭圆,BC 上切点 E 是 BC 的中点,则平行于 BC 的椭圆的弦的中点在 AE 上,AE 是椭圆的一条直径.

进一步,如果图 2-4-4(a)中 D,E,F 分别是$\triangle ABC$ 的中点,则$\triangle A'B'C'$一定是等边三角形.这时图 2-4-4(b)中 O'是$\triangle A'B'C'$的内切圆圆心,这证明了:

如果$\triangle ABC$ 的内切椭圆的切点分别是三边上的中点,则椭圆的中心就是$\triangle ABC$ 的重心(这样内切椭圆的总存在).

容易看出,对于三角形内一点 O,存在以 O 为中心而内切于三角形的椭圆的充要条件是:存在仿射变换,使得 O 变成三角形的角平分线的交点.利用本节习题 7,进一步可以证明(证明留给读者):

对于三角形内一点 O,存在以 O 为中心而内切于三角形的椭圆的充要条件是,点 O 在三角形的三条中位线所围成三角形的内部.

如图 2-4-5,设 ξ 是椭圆的一条直径,那么平行于 ξ 的弦的中点轨迹也是椭圆的直径,记为 η;ξ 与 η 叫做椭圆的一对共轭直径.共轭直径可以用下列性质来刻画:

平行于直径 ξ 的弦的中点轨迹是直径 η;而平行于 η 的椭圆的弦的中点轨迹是ξ.

这一性质在仿射变换下是不变的,特别,如果在仿射变换下,椭圆变成圆,那么椭圆的一对共轭直径变成圆的共轭直径.而圆的

任一对共轭直径互相垂直. 利用仿射变换也不难证明,椭圆的任意直径端点处的切线平行于它的共轭直径. 如图 2-4-5, A, A'是 η 与椭圆的交点, A, A'处的切线平行于 η 的共轭直径 ξ;同理, ξ 与椭圆交点 B, B'处的切线平行于 η, $ABA'B'$ 构成平行四边形. A, A', B, B'处椭圆的切线也构成平行四边形. 可以证明这两个平行四边形的面积都是常数,分别是 $2ab$ 与 $4ab$, a, b 是椭圆的两半轴长.

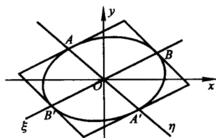
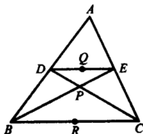


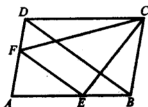
图 2-4-5

习题 2.4

1. 利用仿射变换证明:如果 D, E 分别是 $\triangle ABC$ 的两边 AB, AC 上中点, P 是 DC 与 BE 的交点, Q, R 分别是 DE 与 BC 的中点,则 A, P, Q, R 共线.



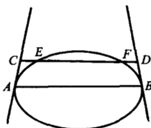
习题 1



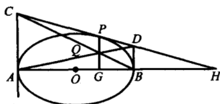
习题 2

2. 设 E, F 是平行四边形 $ABCD$ 的边 AB 与 AD 上两点, $EF /\!/ BD$,试证 $\triangle CDF$ 与 $\triangle CBE$ 的面积相等.

3. 如图，设 AB 是椭圆的弦，CD 是 AB 的平行线，且 C,D 分别是椭圆在 A,B 处切线上点，CD 与椭圆交于 E,F，试证 $CE=FD$.（将此题中椭圆改成欧氏平面上任一二次曲线，则相应结论仍成立，其证明可以利用 §4.2 中的结论.）



习题 3



习题 4

4. 设 O 是椭圆中心，AB 是过 O 的弦，即 AB 是椭圆的直径，椭圆上一点 P 处切线与 A,B 处切线分别交于 C,D，设 $Q=CB\times AD$，$H=AB\times CD$，$G=PQ\times AB$，试证，

(1) $R(AB,GH)=R(CD,PH)=-1$；

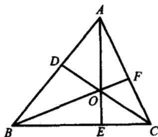
(2) $CA /\!/ PG /\!/ DB$；

(3) $PQ=QG$.

5. 利用仿射变换讨论椭圆的内接四边形面积最大时四边形满足的条件.

6. 利用仿射变换讨论椭圆的外切四边形面积最小时四边形满足的条件.

7. 设 D,E,F 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 AB,BC,CA 上点，AE,BF,CD 交于 $\triangle ABC$ 内点 O. 试证存在仿射变换 φ，使得线段 AE，BF，CD 分别变成三角形的角平分线的充要条件是三正数 $\dfrac{AF}{FC},\dfrac{AD}{DB}$，1 中任两数之和大于第三数. 这时存在 $\triangle ABC$ 的内切椭圆，椭圆的中心是 O.



习题 7

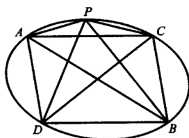
8. 设 D,E,F 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 AB，BC，CA 上的内点，试证存在内切于 $\triangle ABC$ 的

椭圆，且切点分别是 D,E,F 的充要条件是△ABC 与△EFD 成透视．

9．如果 D,E,F 分别是△ABC 的三边 AB,BC,CA 上的点，试证存在切于△ABC 三边的椭圆，且切点分别是 D,E,F 的必要条件是△ABC 与△EFD 成透视．

10．设 D,E,F 分别是△ABC 的三边 AB,BC,CA 上点，AE,BF,CD 交于一点 O，试证存在仿射变换使得 AE,BF,CD 成为三角形的三条高．

11．设 AB,CD 是椭圆的一对共轭直径，P 是椭圆上任一点，试证，PA,PB,PC,PD 是调和直线．



习题 11

第 三 章
二次曲线的射影理论

这一章讨论射影平面上的二次曲线理论，介绍射影二次曲线的几个重要定理，如 Steiner，Pascal 及 Brianchon 定理．其中 Steiner 定理告诉我们，非退化有实轨迹的射影二次曲线是线束之间非透视的射影映射对应直线交点的轨迹，这说明射影二次曲线可以用点与直线的结合关系来描述，这就是二次曲线的射影定义．这一章还介绍以极点极线为主要内容的配极理论．

§3.1 二次曲线的射影定义

3.1.1 二次曲线

与前面一样，(x_1, x_2, x_3)是射影平面上点的射影坐标．

定义 3.1.1 射影平面上满足 $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0$ 的点 $P(x_1, x_2, x_3)$的轨迹叫二阶曲线，也常简称为二次曲线，方程中 $a_{ij} = a_{ji}$，且不全为 0．

利用矩阵乘法，二阶曲线的方程可以写成

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

其中 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$ 叫做二次曲线的系数矩阵，简记为 $A=(a_{ij})$. 如果记 $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，则二阶曲线 $\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j=0$ 可简记为

$$x^{\mathrm{T}}Ax=0.$$

假如二次曲线的系数矩阵 A 非退化，即 $|A|\neq 0$，则称二次曲线 $x^{\mathrm{T}}Ax=0$ 非退化，否则称 $x^{\mathrm{T}}Ax=0$ 退化.

例 1 二阶曲线 $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ 与 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ 都是非退化的，但后者无实轨迹. 二阶曲线 $x_1^2\pm x_2^2=0$ 的矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \pm 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 退化，因此二阶曲线 $x_1^2\pm x_2^2=0$ 退化，它们的轨迹分别是一点 $(0,0,1)$ 与两条直线 $x_1+x_2=0$，$x_1-x_2=0$. 二阶曲线 $x_1x_2-x_2^2+x_2x_3-x_1x_3=0$ 可以写成 $(x_1-x_2)(x_2-x_3)=0$，它是两条相交直线. 根据后面证明的引理 3.1.6，它是退化的，自然这也可以通过计算系数矩阵 $\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$ 的秩或行列式得到这一结论.

显然，例 1 中二阶曲线 $x_1x_2-x_2^2+x_2x_3-x_1x_3=0$ 的系数矩阵也可以表示为 $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，这样的表示可简化计算.

如果 $\rho x=By$ 是射影平面上的坐标变换，那么二阶曲线

$x^{\mathrm{T}}Ax=0$ 在坐标 y 下成为：

$$y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}ABy=0.$$

由于 $|B|\neq 0$，矩阵 $B^{\mathrm{T}}AB$ 退化与否，取决于矩阵 A. 这说明二阶曲线的退化与否跟射影坐标系的选取无关. 二阶曲线在不同坐标系下的矩阵是合同矩阵.

类似于由点构成的二阶曲线，有

定义 3.1.2 称射影平面上满足 $\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}\xi_i\xi_j=0$ 的直线 $\xi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 的集合叫二级曲线，也叫线二次曲线，也常把它叫做二次曲线.

二级曲线的方程也可以简记为

$$\xi^{\mathrm{T}}A\xi=0,$$

其中 $A=(a_{ij})$ 是对称矩阵，a_{ij} 不全为 0.

下面主要讨论二阶曲线，二级曲线的讨论类似进行，也可以利用对偶原理. 对偶原理在二次曲线理论中的运用方法以后说明.

定义 3.1.3 如果点 $P(x)$ 满足 $Ax=0$，则 P 叫二次曲线 $x^{\mathrm{T}}Ax=0$ 的奇点.

由于射影坐标 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 的分量不能全为 0，由 $Ax=0$ 可知矩阵 A 退化，这说明

性质 3.1.1 二次曲线退化的充要条件是它上面存在奇点.

性质 3.1.2 如果 P 是二次曲线上奇点，Q 是二次曲线上另一点，那么直线 PQ 上每一点在二次曲线上.

证 设 P,Q 的坐标是 p,q，二次曲线 Γ 的方程是 $x^{\mathrm{T}}Ax=0$，p,q 满足

$$p^{\mathrm{T}}Ap=0,\ p^{\mathrm{T}}Aq=0,\ q^{\mathrm{T}}Aq=0.$$

对于直线 PQ 上任一点 $\lambda p+\mu q$，

$$(\lambda p+\mu q)^{\mathrm{T}}A(\lambda p+\mu q)=\lambda^2p^{\mathrm{T}}Ap+2\lambda\mu p^{\mathrm{T}}Aq+\mu^2q^{\mathrm{T}}Aq=0,$$

其中用到 $p^{\mathrm{T}}Aq=q^{\mathrm{T}}Ap$，因此直线 PQ 在 Γ 上.

如果 $P(1,0,0)$ 是二次曲线上奇点，则有 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=0$，

二次曲线的方程是 $a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0$，它的判别式 $\Delta=a_{23}^2-a_{22}a_{33}$. 如果二次曲线上除了奇点 P 外无其他点，则有 $\Delta<0$. 如果二次曲线上还有一个奇点，则 $\Delta=0$，这时此两奇点连线上的点都是奇点. 如果 $\Delta>0$，则 $a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0$ 可以分解成两个一次因式的乘积. 这证明了退化的二次曲线只能是下列三种情况之一：

(1) 一点； (2) 一直线； (3) 两条相交直线.

这说明如果二次曲线退化，并且它上面至少有两点，那么它的方程总可以分解成两个一次因式的乘积. 这也给出了判断二元二次方程可否分解及分解的方法.

性质 3.1.3(Steiner) 设 φ 是线束 S_1 与 S_2 之间的非透视的射影映射，那么 φ 的对应直线交点的轨迹构成一条非退化的二次曲线，并且线束中心 S_1,S_2 也在此二次曲线上.

证 设 P 是直线 $\varphi(S_1S_2)$ 与 $\varphi^{-1}(S_1S_2)$ 的交点，$\varphi(S_1S_2)=S_2P$，$\varphi(S_1P)=S_1S_2$. 再取 E 为 φ 的一对对应直线的交点，利用 φ 是非透视的射影映射，可以证明 S_1,S_2,P,E 中无三点共线. 取 S_1PS_2 为坐标三点形，E 为单位点，见图3-1-1. 这些直线的方程分别是

图 3-1-1

$PS_1:x_3=0, PS_2:x_1=0, S_1S_2:x_2=0, S_1E:x_2-x_3=0, S_2E:x_1-x_2=0.$

这时

$$\varphi: PS_1\to S_1S_2, S_1S_2\to PS_2, S_1E\to S_2E,$$

利用 φ 保交比容易算得，线束 S_1 中任一直线 $\lambda x_2+\mu x_3=0$ 在 φ 下的像是直线 $\lambda x_1+\mu x_2=0$. 它们的交点 $P(x)$ 满足 $\begin{cases}\lambda x_2+\mu x_3=0,\\ \lambda x_1+\mu x_2=0,\end{cases}$ 消去 λ,μ 得 φ 的对应直线交点的方程

$$x_2^2 - x_1 x_3 = 0.$$

显然它是非退化的，且线束中心 S_1 与 S_2 在此曲线上.

另一方面，如果 $P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ 满足此方程，则有不全为 0 的 λ, μ 使

$$\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_3} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = -\frac{\mu}{\lambda},$$

这证明此二次曲线上的点都是 φ 的对应直线的交点.

如果 $\varphi: S_1 \barwedge S_2$ 是透视，那么对应直线交点轨迹由 φ 的透视轴及线束中心的连线组成. 因此透视 $\varphi: S_1 \barwedge S_2$ 的对应直线交点的轨迹是一条退化的二次曲线. 后面要证明 Steiner 定理的另一部分：任一非退化有实轨迹的二次曲线都可以看成是线束之间非透视射影映射的对应直线交点的轨迹.

性质 3.1.4 射影平面上没有三点共线的五点决定一条二阶曲线.

证 如图 3-1-2，设 A, B, C, D, E 是无三点共线的五点，则有射影映射

$$A(AC, AD, AE, \cdots) \barwedge B(BC, BD, BE, \cdots),$$

显然它不是透视. 由 Steiner 定理，A, B, C, D, E 在此映射决定的二次曲线上. 这样的二次曲线的唯一性，可以由定理 3.1.10 得到.

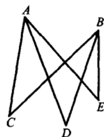


图 3-1-2

类似性质 3.1.3，可以证明

性质 3.1.5 设 $\varphi: \xi(P, Q, \cdots) \barwedge \xi'(P', Q', \cdots)$ 是直线之间非透视的射影映射，则它的对应点的连线构成一条二级曲线，并且直线 ξ 与 ξ' 也在此二级曲线上.

性质 3.1.3 与 3.1.5 实际上互为对偶命题.

例 2 设直线 $x_3 = 0$ 上点 $P(\lambda, \mu, 0)$ 经过映射 φ 成为直线 $x_1 = 0$ 上点 $P'(0, \lambda, \lambda + \mu)$，则 φ 是直线 $x_3 = 0$ 与 $x_1 = 0$ 之间的一

一保交比的映射，是射影映射．由点 $P(\lambda,\mu,0)$ 在直线 $PP'(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 上，得 $\lambda\xi_1+\mu\xi_2=0$，同理得 $\lambda\xi_2+(\lambda+\mu)\xi_3=0$．因此，$\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 满足

$$\begin{cases}\lambda\xi_1+\mu\xi_2=0,\\ \lambda(\xi_2+\xi_3)+\mu\xi_3=0.\end{cases}$$

消去 λ,μ 得 φ 决定的二级曲线方程

$$\xi_1\xi_3-\xi_2^2-\xi_2\xi_3=0.$$

这是一条非退化的二级曲线，直线 $x_3=0$ 与 $x_1=0$ 是此二级曲线上直线．

例 3 设 ψ 是线束 $A(0,0,1)$ 与 $B(1,0,0)$ 之间的映射，把直线 $\xi(\lambda,\mu,0)$ 变成 $\xi'(0,\mu,-\lambda)$，ψ 是射影映射．直线 ξ 与 ξ' 的交点满足

$$\begin{cases}\lambda x_1+\mu x_2=0,\\ \mu x_2-\lambda x_3=0.\end{cases}$$

消去 λ,μ 得 ψ 决定的二阶曲线

$$x_1x_2+x_2x_3=0.$$

它是退化的，由两直线 $x_2=0$ 与 $x_1+x_3=0$ 上点构成．射影映射 ψ 是线束 A 与 B 之间的透视，透视轴是直线 $x_1+x_3=0$，而 $x_2=0$ 是线束中心的连线．

3.1.2 二次曲线的切线

下面讨论二次曲线与直线的关系．

引理 3.1.6 如果直线与二次曲线交于三个点，那么二次曲线退化，这时直线上所有点在二次曲线上．

证 假设直线 ξ 与二次曲线 $\Gamma: x^{\mathrm{T}}Ax=0$ 交于 A,B,C，取射影坐标系使它们的坐标分别是 $A(1,0,0),B(0,1,0),C(1,1,0)$．分别代入 Γ 的方程得

$$a_{11}=a_{12}=a_{22}=0.$$

因此 Γ 的方程是 $2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0$，直线 $\xi: x_3=0$ 上的点都在 Γ 上. 由于 $|A|=0$，Γ 是退化的.

由引理 3.1.6 知道，如果二次曲线非退化，它与任意直线最多交于两点. 以下假设 $\Gamma: x^{\mathrm{T}}Ax=0$ 是非退化且有实轨迹的二次曲线，任意直线与 Γ 的交点个数可能是 0,1 或 2.

设 $P(p)$, $Q(q)$ 是直线 ξ 上两点，那么直线 ξ 上任一点可以表示成 $\lambda p+\mu q$，λ, μ 不全为 0. 代入 Γ 的方程得到 λ, μ 的二次齐次方程：

$$\lambda^2 p^{\mathrm{T}}Ap+2\lambda\mu p^{\mathrm{T}}Aq+\mu^2 q^{\mathrm{T}}Aq=0.$$

这一方程决定直线 ξ 与二次曲线 Γ 的交点. 由引理 3.1.6 可知，它的系数 $p^{\mathrm{T}}Ap$, $p^{\mathrm{T}}Aq$, $q^{\mathrm{T}}Aq$ 不能全为 0. 方程的判别式是

$$\Delta=(p^{\mathrm{T}}Aq)^2-p^{\mathrm{T}}Ap\cdot q^{\mathrm{T}}Aq.$$

定义 3.1.4 如果直线 ξ 与二次曲线 Γ 交于一个二重点 C（这时 $\Delta=0$），那么 ξ 叫做二次曲线 Γ 的切线，C 是切点；如果 ξ 与 Γ 交于两点，则 ξ 叫 Γ 的割线.

性质 3.1.7 如果点 $P(p)$ 在二次曲线上，那么过 P 的切线是

$$p^{\mathrm{T}}Ax=0.$$

证 设 $Q(x)$ 是过 P 的直线上任一点，由于 $P\in\Gamma$，PQ 是切线的条件是 $\Delta=(p^{\mathrm{T}}Ax)^2=0$，即 $p^{\mathrm{T}}Ax=0$. 由于 Q 可以是切线上任一点，过 P 的切线是

$$p^{\mathrm{T}}Ax=0.$$

如果点 P 不在 Γ 上，那么点 $Q(x)$ 在过 P 的切线上的条件仍然是 $\Delta=0$，即

$$(p^{\mathrm{T}}Ax)^2-p^{\mathrm{T}}Ap\cdot x^{\mathrm{T}}Ax=0.$$

如果它可以因式分解为两个一次因式，就得到过 P 的两条切线；如果上式不可因式分解，那么过 P 没有（实）切线. 由此可知，射影平面上的点关于非退化二次曲线 Γ 分成三类：

（i）Γ 上点，有唯一切线通过的点；

（ⅱ）Γ 内点，无切线通过的点；

（ⅲ）Γ 外点，有两条切线通过的点.

如图 3-1-3，Q,R 是 Γ 上点，P 是 Γ 外点，T 是 Γ 内点.

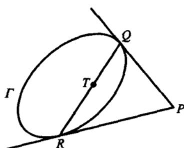


图 3-1-3

例 4 设 $\Gamma: x_1^2-4x_2^2+x_3^2=0$ 是一条二次曲线，分别求过点 $P(2,1,0)$，$Q(0,0,1)$，$R(0,1,0)$的切线.

解 将二次曲线的方程写成 $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，点 P 在 Γ 上，所以过 P 的切线是$(2,1,0)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，即 $x_1-2x_2=0$. 而点 Q,R 都不在 Γ 上，过 Q 的切线由

$$x_3^2-(x_1^2-4x_2^2+x_3^2)=0,\ 即\ x_1^2-4x_2^2=0$$

决定. 因此过 Q 的两条切线是 $x_1-2x_2=0$ 与 $x_1+2x_2=0$，切点分别是$(2,1,0)$与$(2,-1,0)$. 过 R 的切线由 $x_1^2+x_3^2=0$ 决定，此方程只有实解$(0,1,0)$即点 R，因此过 R 无切线.

性质 3.1.8 非退化二次曲线 $\Gamma: x^{\mathrm{T}}Ax=0$ 的所有切线构成非退化的二级曲线

$$\xi^{\mathrm{T}}A^{-1}\xi=0.$$

证 如果点 $P(\bar{x})$在 Γ 上，则 $\bar{x}^{\mathrm{T}}A\bar{x}=0$. 过 P 的切线是 $\bar{x}^{\mathrm{T}}Ax=0$，其线坐标是$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\bar{x}^{\mathrm{T}}A$，改写为 $\bar{x}^{\mathrm{T}}=\xi^{\mathrm{T}}A^{-1}$ 并代入 $\bar{x}^{\mathrm{T}}A\bar{x}=0$ 得，

$$\xi^{\mathrm{T}}A^{-1}\xi=0,$$

此即 Γ 上点的切线满足的方程. 按照前面定义，它是一条非退化的二级曲线. 反之，如果 ξ 在此二级曲线上，则由 $\bar{x}^{\mathrm{T}}=\xi^{\mathrm{T}}A^{-1}$ 可得 Γ 上点 $P(\bar{x})$，且 P 处切线就是 ξ.

从这一性质知道，非退化的二阶曲线与二级曲线之间存在着一一对应，这一对应可通过切点与切线的对应实现．可以证明，非退化二级曲线 $\xi^{T}A\xi=0$ 中任一直线 ξ 上存在唯一的一点 P，使得过 P 只有一条直线（就是 ξ）属于二级曲线，这种点 P 叫做 ξ 上的切点．可以证明 P 就是二级曲线按照上面方法决定的二阶曲线上点，ξ 是 P 处切线．按照二阶曲线与二级曲线的这一对应，二级曲线 $\xi^{T}A\xi=0$ 对应的二阶曲线是 $x^{T}A^{-1}x=0$．

另一方面，如果二次曲线 $\Gamma: x^{T}Ax=0$ 非退化，但是没有实轨迹，例如 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$．假如允许 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 的分量取复数，这样的点叫射影平面上的虚点，类似定义虚直线．如果过 Γ 上点的直线与 Γ 交于虚的二重点，那么此直线也叫 Γ 的切线，这时切点是虚点，切线是虚切线．类似上面讨论不难知道，如果 $P(\bar{x})$ 是 Γ 上虚点，那么过 P 的切线仍可用下式表示：

$$\bar{x}^{T}Ax=0.$$

例如 $I(1,\mathrm{i},0)$，$J(1,-\mathrm{i},0)$ 是 $\Gamma: x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ 上虚点，过 I,J 的切线分别是

$$(1,\mathrm{i},0)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0 \text{ 与 } (1,-\mathrm{i},0)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

即

$$x_1+\mathrm{i}x_2=0 \text{ 与 } x_1-\mathrm{i}x_2=0.$$

二阶曲线 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ 的所有（虚）切线形成一条二级曲线 $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=0$．

要注意的是，有实轨迹的二次曲线上也有虚点，这种点处的切线也是虚直线．如例 3 中点 $R(0,1,0)$ 关于二次曲线 $x_1^2-4x_2^2+x_3^2=0$ 的切线由 $x_1^2+x_3^2=0$ 决定，所以过 R 有两条虚切线 $x_1+\mathrm{i}x_3=0$，$x_1-\mathrm{i}x_3=0$，此两切线上的切点分别是 $(1,0,\mathrm{i})$ 与 $(1,0,-\mathrm{i})$．

在计算由二阶曲线 $x^{T}Ax=0$ 决定的二级曲线 $\xi^{T}A^{-1}\xi=0$ 时，

矩阵 A^{-1} 可用 A 的伴随矩阵代替，由于 A 是对称矩阵，A 的伴随矩阵也是对称的，它就是 A 的代数余子式所成矩阵(A_{ij}).

3.1.3 二次曲线的射影定义

在性质 3.1.3，我们证明了线束之间的射影映射的对应直线的交点构成一条二次曲线，下面证明所有非退化有实轨迹的二次曲线都可以这样生成.

引理 3.1.9 适当选取坐标系，非退化有实轨迹的二次曲线的方程可以表示成

$$x_2^2 - x_1 x_3 = 0.$$

证 设 Γ 是一条非退化有实轨迹的二次曲线，任取 Γ 上两点 A,B，点 C 是 A,B 处切线的交点. 以 ACB 为坐标三点形，设 Γ 的方程是

$$\sum a_{ij}x_i x_j = 0,\ a_{ij} = a_{ji},\ |(a_{ij})| \neq 0.$$

由坐标系的选取，$A(1,0,0)$处切线是 $AC: x_3 = 0$；另一方面，从 Γ 的方程可得 A 处切线是$(1,0,0)Ax = 0$，即 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$，因此

$$a_{11} = a_{12} = a_{21} = 0,\ a_{13} \neq 0.$$

同理过 $B(0,0,1)$的切线 $a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0$ 应与 $BC: x_1 = 0$ 重合，所以

$$a_{23} = a_{32} = a_{33} = 0.$$

因此 Γ 的方程是

$$a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 x_3 = 0.$$

如果坐标系的单位点也取在 Γ 上，则 $a_{22} + 2a_{13} = 0$. 因此 Γ 的方程可以表示成

$$x_2^2 - x_1 x_3 = 0.$$

利用这一简化形式，我们着手证明下面的定理.

定理 3.1.10(Steiner) 设 A,B 是非退化二次曲线 Γ 上两点，

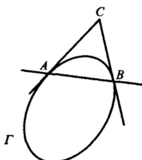


图 3-1-4

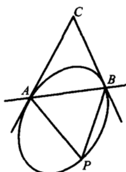


图 3-1-5

C 是 A,B 处切线的交点,P 是 Γ 上异于 A,B 的动点,那么由 $AP \to BP$,$AC \to AB$,$AB \to BC$ 决定的线束 A,B 之间的对应是非透视的射影映射.

证 由引理 3.1.9 取 ACB 为坐标三点形,单位点也在 Γ 上,则有 $\Gamma: x_2^2 - x_1x_3 = 0$. 设直线 $\xi: \lambda x_2 + \mu x_3 = 0$ 是线束 A 中任一直线,不妨设 $\lambda\mu \neq 0$. 计算可得 ξ 与 Γ 的另一交点 $P(\mu^2, -\lambda\mu, \lambda^2)$. 要证明,由 AP 对应于 BP 决定的线束 A,B 之间的对应是非透视的射影映射. 直线 AP 的对应直线 BP 的线坐标是 $(-\lambda\mu, -\mu^2, 0)$,即 $(\lambda, \mu, 0)$. 不难验证,由直线 $AP: \lambda x_2 + \mu x_3 = 0$ 对应直线 $BP: \lambda x_1 + \mu x_2 = 0$ 定义的线束 A 与 B 之间对应是一一的,且是保交比的,这是一个射影映射. 这一映射将 A 处切线 $AC: x_3 = 0$ 变成 $AB: x_2 = 0$($\lambda = 0$ 时),而把 $AB: x_2 = 0$ 变成 B 处切线 $BC: x_1 = 0$($\mu = 0$ 时),其中 AB 是线束 A 与 B 的中心连线,这也说明 $A(AP, \cdots) \barwedge B(BP, \cdots)$ 不是透视.

此定理与性质 3.1.3 都称为 **Steiner 定理**. 它们说明了非退化有实轨迹的二次曲线都可以表示成线束之间的非透视的射影映射的对应直线交点的轨迹. 而线束之间的非透视的射影映射都能表示成两个透视的合成,都可用点和直线的结合关系来叙述. 因此二次曲

线也可以用点与直线的结合关系生成,二次曲线的关于点与直线的结合关系的性质在直射变换下不变,二次曲线应该是射影几何研究的内容.这一方面进一步的讨论见下一节.

例 5 设 A,B,C 是不共线的三点,ξ,η 分别是过 A,B 而不过 C 的直线,那么由 $\xi\to AB,AB\to\eta,AC\to BC$ 决定线束 A 与 B 之间的射影映射 φ.由于 $\varphi(AB)\neq AB$,φ 不是透视.按照 Steiner 定理,φ 决定一条过三点 A,B,C 的二次曲线,并且 ξ,η 分别是 A,B 处的切线.

这里说明一下关于二次曲线命题的对偶原理,进一步的讨论见下一节.我们知道,射影平面上的对偶是以点与直线作为基本的对偶元素,点与直线的结合关系作相应改变得到的.利用 Steiner 定理,二次曲线可以用线束之间非透视的射影映射的对应直线的交点轨迹来定义.线束的对偶是点列,"线束之间非透视的射影映射的对应直线的交点轨迹"的对偶是"点列之间非透视的射影映射的对应点的连线轨迹".把对偶原理扩充到二次曲线,二阶曲线的对偶图形是二级曲线.在这一对应中,二阶曲线上的点与切线分别对应于二级曲线中直线与其上的切点.这样可以叙述定理 3.1.10 的对偶定理.

定理 3.1.11 设 ξ,η 是非退化二级曲线中两条直线,则由二级曲线中其他直线与 ξ,η 的交点作为对应点定义了直线 ξ 与 η 之间的非透视的射影映射.如果 ξ 与 η 上的切点分别是 A,B,那么这一射影映射把 A 变成 C,C 变成 B,这里 C 是 ξ 与 η 的交点.

利用前面给出的二阶曲线与二级曲线的关系,定理 3.1.11 也可写成下面便于运用的形式:

设 ξ,η 是二次曲线的两条定切线,那么由二次曲线的任一切线与 ξ,η 的交点作为对应点定义了直线 ξ 与 η 之间的一个射影映射.如果 A,B 是 ξ,η 上切点,$C=\xi\times\eta$.则此射影映射把 A 变成 C,C 变成 B(见图 3-1-6).

例 6 设三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 内接于二次曲线 Γ,则此两三

图 3-1-6

点形也外切于某一条二次曲线.

证 如图 3-1-7,记 $P=AB\times B'C'$, $Q=AC\times B'C'$, $R=A'C'\times BC$, $S=A'B'\times BC$. 由 Steiner 定理,存在射影映射

图 3-1-7

$$A(AC',AB,AC,AB',\cdots)\barwedge A'(A'C',A'B,A'C,A'B',\cdots),$$

分别考虑两边与 $B'C'$, BC 的交点,得

$$\varphi:B'C'(C',P,Q,B',\cdots)\barwedge BC(R,B,C,S,\cdots),$$

此射影映射对应点连线至少交于 A, A' 两点,所以它不是透视. 由二级曲线的 Steiner 定理,φ 的对应点连线以及 $B'C'$, BC 属于某二级曲线,即三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 的六条边外切于某二次曲线.

此题也可以利用 §3.3 的 Pascal 定理与 Brianchon 定理证明.

设 (x,y) 是欧氏平面上直角坐标,方程

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

表示欧氏平面上的二次曲线，齐次坐标下它成为

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0,$$

其中 $x=\frac{x_1}{x_3}, y=\frac{x_2}{x_3}$. 反过来拓广欧氏平面上的二次曲线也决定欧氏平面上的二次曲线. 我们通过下面几例说明射影二次曲线的理论在欧氏几何中的运用，进一步讨论见第四章.

例 7 设 H 是欧氏平面上二次曲线的弦 AB 的中点，如图 3-1-8，过 H 的弦 CD, EF 的端点连线 CF 与 ED 分别交 AB 于 I, G，求证 $AI=GB$.

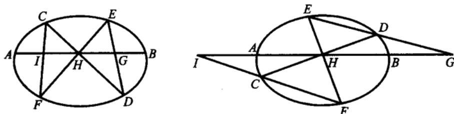


图 3-1-8

证 由 Steiner 定理，可得

$$C(CA,CF,CD,CB,\cdots)\barwedge E(EA,EF,ED,EB,\cdots),$$

考虑两边与直线 AB 的交点得

$$AB(A,I,H,B,\cdots)\barwedge AB(A,H,G,B,\cdots),$$

所以 $R(AI,HB)=R(AH,GB)$，即 $\frac{AH}{IH}\cdot\frac{IB}{AB}=\frac{AG}{HG}\cdot\frac{HB}{AB}$. 所以 $\frac{IB}{IH}=\frac{AG}{HG}$，利用 $IB=IH+HB$, $AG=AH+HG$ 可得

$$IH=HG,\text{因此 } AI=GB.$$

如果此例中二次曲线是圆，那么可以利用同弧上的圆周角相等等方法证明，这就是蝴蝶定理. 对于一般情况，读者也可用初等几何的方法试一试.

例 8 设欧氏平面上二次曲线 $x^2+4y^2-2=0$,

(1) 求过点 $A(a,0)$的切线,并求出切点;

(2) 求平行于直线 $x+2y=0$ 的切线.

解 下面利用二级曲线概念来解此例.二次曲线 $x^2+4y^2-2=0$ 的齐次坐标方程是 $x_1^2+4x_2^2-2x_3^2=0$,它的所有切线构成二级曲线:

$$\xi_1^2+\frac{1}{4}\xi_2^2-\frac{1}{2}\xi_3^2=0,\ 即\ 4\xi_1^2+\xi_2^2-2\xi_3^2=0.$$

(1) 过点 $A(a,0,1)$的切线 $\xi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$满足

$$\begin{cases}a\xi_1+\xi_3=0,\\4\xi_1^2+\xi_2^2-2\xi_3^2=0.\end{cases}$$

解得切线 $\xi(1,\sqrt{2a^2-4},-a)$,$\eta(1,-\sqrt{2a^2-4},-a)$,即

$$\xi:x+\sqrt{2a^2-4}y-a=0,\ \eta:x-\sqrt{2a^2-4}y-a=0,\ |a|\geqslant\sqrt{2},$$

ξ,η 与二次曲线的交点就是 ξ,η 上切点,它们的欧氏坐标分别是 $\left(\frac{2}{a},\frac{1}{2a}\sqrt{2a^2-4}\right)$,$\left(\frac{2}{a},-\frac{1}{2a}\sqrt{2a^2-4}\right)$.如果 $a=\pm\sqrt{2}$,则点 A 在二次曲线上,ξ 与 η 重合,是过 A 的切线.

由 §3.2 可知,ξ,η 是二次曲线的自共轭直线,它们上的切点分别是它们的极点.

(2) 平行于直线 $x_1+2x_2=0$ 的直线是 $x_1+2x_2+\lambda x_3=0$,以 $(1,2,\lambda)$代入 $4\xi_1^2+\xi_2^2-2\xi_3^2=0$,得 $\lambda=\pm 2$.因此平行于 $x+2y=0$ 的两条切线是

$$x+2y-2=0\ 与\ x+2y+2=0.$$

直线 $x+2y+\lambda=0$ 在 $-2<\lambda<2$ 时与椭圆 $x^2+4y^2=2$ 交于两点;在 $\lambda=\pm 2$ 时是椭圆的切线,$\lambda<-2$ 或 $\lambda>2$ 时与椭圆不相交.

习题 3.1

1. 利用奇点证明下列二次曲线退化,并将它们分解成一次因式的乘积:

(1) $x_1^2-2x_2^2-x_3^2-x_1x_2-3x_2x_3=0$,

(2) $2x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-2x_2x_3=0$,

(3) $x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+x_1x_2+2x_1x_3+7x_2x_3=0$.

2. 分别求过点 $A(1,0,\sqrt{2})$, $B(4,3,0)$并且切于二次曲线 $2x_1^2+4x_2^2-x_3^2=0$ 的直线.

3. 求通过给定点$(2,0,1)$,$(0,1,1)$,$(0,-1,1)$且切于二直线 $x_1-2x_3=0$ 及 $x_2-x_3=0$ 的二次曲线.

4. 求二次曲线 $x_1^2-2x_2x_3=0$ 的所有切线构成的二级曲线的方程,并求过点 $A(2,2,1)$与 $B(1,0,1)$的切线.

5. 试证:二次曲线上的四定点与一动点所连接的四直线的交比是常数.

6. 设有一个变动的三点形,其三边分别通过不共线的三个定点,其两顶点分别在两定直线上移动,试证第三个顶点的轨迹是通过三个定点中两个的二次曲线.

7. 设三点形 ABC 与 $A'B'C'$同时外切于一条二次曲线,求证它们同时内接于一条二次曲线.

8. 试证由直线 $\xi(\lambda,\mu,0)$到直线 $\xi'(0,\lambda,\mu)$决定的线束 $A(0,0,1)$到线束 $B(1,0,0)$的映射 φ 是射影映射,并求 φ 决定的二阶曲线.

9. 试证由直线 $\xi:x_3=0$ 上点 $P(\lambda,\mu,0)$对应直线 $\xi':x_1=0$ 上点 $P'(0,\mu,\lambda)$决定的映射 ψ 是射影映射,并求 ψ 决定的二级曲线.

10. 已知 A,B,C,D 是无三点共线的四点,常数 $k\neq 0,1,\infty$.试证,使得

$$R(PAPB,PCPD)=k$$

的动点 P 在一条二次曲线上,且 A,B,C,D 也在此二次曲线上.

§3.2 配　　极

3.2.1 极点与极线

在这一节我们始终假设二次曲线 $\Gamma: x^{\mathrm T}Ax=0$ 是非退化的.

定义 3.2.1 如果点 $P(p)$,$Q(q)$关于二次曲线 $x^{\mathrm T}Ax=0$ 满足

$$p^{\mathrm T}Aq=0,$$

则称 P,Q 关于二次曲线共轭.

由定义,如果点 P 与 Q 共轭,则 Q 与 P 也共轭,共轭关系是相互的.下面的引理给出了共轭的几何意义.

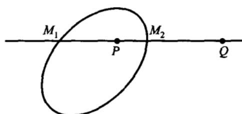


图 3-2-1

引理 3.2.1 如果 M_1,M_2 是过点 P 与 Q 的直线和二次曲线的交点,那么两点 P,Q 共轭的充要条件是 $R(M_1M_2,PQ)=-1$.

证 直线 PQ 上其他点可以用 $p+\lambda q$ 表示,$\lambda\neq 0$.代入二次曲线的方程 $x^{\mathrm{T}}Ax=0$ 得

$$p^{\mathrm{T}}Ap+2\lambda p^{\mathrm{T}}Aq+\lambda^2 q^{\mathrm{T}}Aq=0.$$

如果 λ_1,λ_2 是它的解,则 M_1,M_2 可表示成 $p+\lambda_1 q,p+\lambda_2 q$.交比

$$R(M_1M_2,PQ)=R(PQ,M_1M_2)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=-1$$

的充要条件是 $\lambda_1+\lambda_2=0$,即 $p^{\mathrm{T}}Aq=0$.

如果方程 $p^{\mathrm{T}}Ap+2\lambda p^{\mathrm{T}}Aq+\lambda^2 q^{\mathrm{T}}Aq=0$ 没有实数解,那么直线 PQ 与二次曲线没有实交点.假设 λ_1,λ_2 是此方程的复数根,则 λ_1,λ_2 是一对共轭复数,且易知 $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|=1$.这种情况下,直线 PQ 与二次曲线交于一对虚点 M_1,M_2,它们的坐标是 $p+\lambda_1 q,p+\lambda_2 q$.用代数的方法把交比推广到允许有虚点的情形,四点 M_1,M_2,P,Q 的交比是 $R(M_1M_2,PQ)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.在这种情况下 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=-1$ 的条件仍然是 $p^{\mathrm{T}}Aq=0$,P,Q 关于二次曲线也共轭.自然这一讨论对于没有实轨

迹的二次曲线也是成立的.按照共轭的定义自然有

性质 3.2.2 点 P 关于二次曲线的所有共轭点构成一条直线，方程是

$$p^{T}Ax=0.$$

定义 3.2.2 直线 $p^{T}Ax=0$ 叫点 P 的极线，而 P 叫此直线的极点.

如果点 P 在二次曲线 Γ 上，那么 P 满足 $p^{T}Ap=0$，因此 P 与自身共轭，这样的点叫自共轭点.所以二次曲线上的点都是自共轭点，它们的极线就是该点处的切线.由定义，切线上任一点都与切点共轭，所以如果知道了二次曲线上的点的一个共轭点，那么它们的连线就是二次曲线的切线.

要注意的是，按照定义，如果二次曲线没有实轨迹，仍然有共轭，极点，极线等概念.

例 1 二次曲线 $\Gamma: x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ 是非退化的，它没有实轨迹.易知点 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$关于 Γ 共轭.直线 AB 与 Γ 交于两虚点 $I(1,\mathrm{i},0)$，$J(1,-\mathrm{i},0)$，I,J 可表示成 $a+\mathrm{i}b$，$a-\mathrm{i}b$，所以

$$R(AB,IJ)=\frac{\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=-1.$$

A,B,I,J 是直线 AB 上的调和点列.点 A,B 的极线分别是

$$x_1=0, x_2=0,$$

它们的交点是 $C(0,0,1)$，它与 I,J 都共轭.另一方面，I,J 处的极线分别是

$$x_1+\mathrm{i}x_2=0 \text{ 与 } x_1-\mathrm{i}x_2=0,$$

它们与 Γ 交于(虚的)二重点，是二次曲线的虚切线，它们的交点就是 $C(0,0,1)$.

例 1 中二次曲线没有实轨迹，I,J 是 Γ 上的虚点，图 3-2-2 是一个示意图.

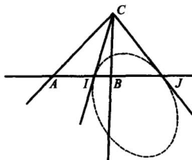


图 3-2-2

这样,给定一条非退化的二次曲线 $\Gamma: x^{\mathrm{T}}Ax=0$ 就有一个点到直线的映射

$$\phi: \rho\xi = Ax.$$

点 P 的像 $\phi(P)$ 是它的极线 ξ,其线坐标为 Ap.它的逆映射 $\phi^{-1}: \rho x = A^{-1}\xi$ 把直线变成它的极点.称映射 ϕ 是二次曲线 Γ 决定的一个**配极变换**.

二次曲线 $x^{\mathrm{T}}Ax=0$ 决定的线二次曲线是 $\xi^{\mathrm{T}}A^{-1}\xi=0$.类似二次曲线的讨论可以对二级曲线进行.但为了节省篇幅,我们给出下面的定义.

定义 3.2.3 如果直线 ξ 与 η 满足 $\xi^{\mathrm{T}}A^{-1}\eta=0$,则称 ξ,η 关于二次曲线 Γ 共轭.

性质 3.2.3 直线 ξ 与 η 共轭的充要条件是 ξ 的极点在 η 上(这时 η 的极点也在 ξ 上).

证 设 P 是 ξ 的极点,则 $\xi=Ap$.如果直线 ξ 与 η 共轭,那么 $\xi^{\mathrm{T}}A^{-1}\eta=0$,故有 $p^{\mathrm{T}}\cdot\eta=0$,即点 P 在直线 η 上.另一方面,如果 ξ 的极点 P 在 η 上,则 $p^{T}\cdot\eta=0$,这时

$$\xi^{\mathrm{T}}A^{-1}\eta=p^{\mathrm{T}}\cdot\eta=0,$$

故有 ξ 与 η 共轭.所以 ξ 与 η 共轭的充要条件是 ξ 的极点在 η 上,或者 η 的极点在 ξ 上.

如果直线 ξ 与自身共轭,则 $\xi^{\mathrm{T}}A^{-1}\xi=0$,$\xi$ 叫**自共轭直线**.由性质 3.2.3,ξ 是自共轭直线的条件是,ξ 的极点 P 在 ξ 上.因此 P 的极线是 ξ,P 是自共轭点,故 P 在二次曲线上,ξ 是二次曲线的切线.综合前面讨论知道,自共轭点的极线就是自共轭直线;自共轭直线的极点是自共轭点,并且它在该自共轭直线上.这证明了

性质 3.2.4 自共轭直线上只有一个自共轭点,自共轭直线是二次曲线的切线,其上的自共轭点就是切线上的切点;过自共轭点也只有一条自共轭直线.

性质 3.2.5 如果点 P 的极线与二次曲线交于两点 Q,R,则 PQ,PR 是过 P 的两条切线.

证 由假设 P 与 Q 共轭，而 Q 为自共轭点，因此 P,Q 是 Q 的两个共轭点，Q 的极线(即切线)是 PQ. 同理，PR 是 R 处的切线(图 3-2-3).

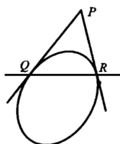


图 3-2-3

此性质给出了求切线的一种方法. 也容易证明，如果点 P 的极线与二次曲线不相交，那么过 P 没有切线.

例2 已知二次曲线 $\Gamma: x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, (1)求点 $P(0,2,1)$的极线与过 P 的切线；(2) 求直线 $\xi(1,0,0)$的极点 S，并求过 S 的切线.

解 (1)二次曲线的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$ 点 P 的极线是 $(0,2,1)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$，即 $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. 它与 Γ 的交点满足：

$$\begin{cases} x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

不难解得交点是 $Q(1,0,-1)$, $R(1,1,1)$. 由性质 3.2.5，过 P 的切线是

$$PQ: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,\ PR: x_1 + x_2 - 2x_3 = 0.$$

(2) 直线 ξ 与 Γ 的交点为 $B(0,1,1)$, $C(0,1,-1)$, B,C 处的切线分别是

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0,\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0.$$

直线 ξ 的极点是它们的交点 $S(2,1,0)$，此两直线就是过 S 的切线.

直线 ξ 的极点也可从下式解得：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.2.2 配极

下面的性质叫*配极原理*.

性质 3.2.6 如果点 P 的极线过 Q,那么 Q 的极线也过 P.

证 如果点 P 的极线过 Q,则 P 与 Q 共轭,即 $p^{\mathrm{T}}Aq=0$,因此 Q 的极线也过 P.

性质 3.2.7 共线点的极线必共点;共点线的极点必共线.

证 如果 $A,B,C,\cdots$是直线 ξ 上点,直线 ξ 的极点是 P,那么 P 与 $A,B,C,\cdots$都共轭.由配极原理,$A,B,C,\cdots$的极线过 P,这证明了共线点的极线共点.后一结论同样可证.

性质 3.2.8 假如 ζ 不是二次曲线的切线,ζ 上点 P 的极线与 ζ 的交点是 P',即 P'是 P 在 ζ 上的共轭点,那么 $P\to P'$定义了直线 ζ 上一个对合.

证 设 C 是直线 ζ 的极点,由于 ζ 不是自共轭直线,点 C 不在 ζ 上.二次曲线 $\Gamma: x^{\mathrm{T}}Ax=0$ 决定的配极变换 $\phi: \rho\xi=Ax$ 限制于直线 ζ 上得到点列 ζ 与线束 C 之间的一个一一映射,易知此映射也是保交比的,因此 ϕ 将 ζ 上点映成它的极线的映射是点列 ζ 与线束 C 之间的射影映射.如果 ζ 上点 P 的极线与 ζ 的交点是 P',则此映射可以表示为 $\zeta(P,\cdots)\barwedge C(CP',\cdots)$.将此映射与线束 C 与点列 ζ 之间的透视合成得射影映射:

$$\zeta(P,\cdots)\barwedge\zeta(P',\cdots).$$

由于 P 与 P'是一对共轭点对,所以 P'的像是 P.由配极诱导的直线 ζ 上映射是对合.

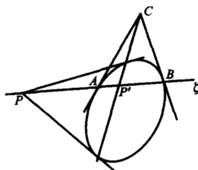


图 3-2-4

此对合的不动点就是 ζ 上的自共轭点,即为 ζ 与 Γ 的交点.因此 ζ 上的对合是双曲型或者是椭圆型取决于 ζ 与 Γ 是否相交.图 3-2-4 中对合是双曲型的.类似地,如果 S 不是

二次曲线上点，由线束 S 中共轭直线对也决定一个对合. 例如，性质3.2.8中 CP, CP' 是线束 C 中一对共轭直线，因此 $CP \rightarrow CP'$ 决定线束 C 的对合.

定义 3.2.4 如果三点形的顶点关于二次曲线两两共轭，则称它是二次曲线的*自极三点形*.

这时三点形的顶点的极线就是它的对边，它的三条边也两两共轭.

性质 3.2.9 二次曲线的内接四点形的对角三点形是自极三点形.

证 如图3-2-5，$ABCD$ 是内接于非退化二次曲线 Γ 的四点形，它是完全四点形. 设 PQR 是它的对角三点形，$S = DC \times PQ$，$T = AB \times PQ$. 由第四调和点作法知道，

$$R(DC, SR) = -1, R(AB, TR) = -1.$$

所以 S 与 R 共轭，T 与 R 也共轭，R 的极线是 $ST = PQ$，同理可证 P 的极线是 QR，因此 PQR 是自极三点形.

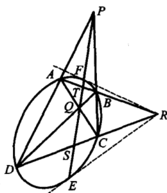


图 3-2-5

如果 PQ 交二次曲线于 E, F，由性质3.2.5，RE, RF 都是二次曲线的切线. 这给出了作过二次曲线外点的切线的方法. 性质3.2.9也给出了作不在二次曲线上点的极线的作法.

对于任一非退化二次曲线 Γ，总存在自极三点形. 除了从二次曲线的内接四点形得到，也可采用下面方法得到自极三点形. 对于任意不在 Γ 上的点 P，设 ξ 是它的极线，在 ξ 上任取一点 Q，$Q \notin \Gamma$. 设 Q 的极线为 η，则 η 过 P 而不过 Q. 设 R 是 ξ 与 η 的交点，则 P, Q, R 两两共轭构成二次曲线 Γ 的自极三点形.

性质 3.2.10 如果以自极三点形作为坐标三点形，那么二次曲线的方程成为

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

证 设 $P(1,0,0)$，$Q(0,1,0)$，$R(0,0,1)$构成二次曲线 Γ 的自极三点形．由于点 P 的极线是 $QR(1,0,0)$，而从 Γ 的方程$\sum a_{ij}x_ix_j=0$ 得 P 的极线是

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0.$$

所以 $a_{11}\neq 0$，$a_{12}=a_{13}=0$．同理从 Q 的极线是 PR 可得 $a_{22}\neq 0$，$a_{23}=0$．因此 Γ 的方程是

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0.$$

由于 Γ 非退化，$a_{11}a_{22}a_{33}\neq 0$．

性质 3.2.10 也给出了化简二次曲线方程的方法．

例 3 利用自极三点形化简二次曲线 $\Gamma: x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3+2x_1x_3-6x_1x_2=0$，并写出所用的坐标变换式．

解 二次曲线 Γ 决定的配极变换是 $\phi: \rho\xi=Ax$，其中 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$非退化，取点 $P(1,0,0)$，$P\notin\Gamma$，它的极线是 $\xi=\phi(P)(1,-3,1)$，再取 ξ 上不在 Γ 上点 $Q(3,1,0)$，Q 的极线 $\eta=\phi(Q)$是$(0,-2,1)$，点 $R=\xi\times\eta$ 的坐标是$(1,1,2)$，由作法 P,Q,R 构成 Γ 的自极三点形(图 3-2-6)．

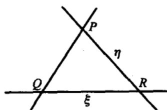


图 3-2-6

设 $\rho x=By$ 是以 PQR 为新坐标系基点的坐标变换公式，y 是点在新坐标系下坐标，将 P,Q,R 的新旧坐标代入得

$$\begin{cases}\rho_1=b_{11},\\ 0=b_{21},\\ 0=b_{31},\end{cases}\quad \begin{cases}3\rho_2=b_{12},\\ \rho_2=b_{22},\\ 0=b_{32},\end{cases}\quad \begin{cases}\rho_3=b_{13},\\ \rho_3=b_{23},\\ 2\rho_3=b_{33},\end{cases}$$

因此 $b_{21}=b_{31}=b_{32}=0$，取 $\rho_1=\rho_2=\rho_3=1$，得 $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$．以

$\rho x = By$代入 $x^{\mathrm{T}}Ax=0$ 得 $y^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)y=0$. 计算得

$$B^{\mathrm{T}}AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}.$$

以自极三点形 PQR 为基点(这时单位点是 $E(5,2,2)$), Γ 的方程是

$$y_1^2-8y_2^2+8y_3^2=0.$$

进一步作射影坐标变换 $\begin{cases}\rho x_1'=y_1,\\ \rho x_2'=2\sqrt{2}y_3,\\ \rho x_3'=2\sqrt{2}y_2,\end{cases}$ 二次曲线 Γ 的方程化简为

$$x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2=0.$$

所用坐标变换是

$$\rho y=\begin{pmatrix}2 & -6 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}x \text{ 与 } \rho x'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\sqrt{2}\\ 0 & 2\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}y,$$

即

$$\rho x'=\begin{pmatrix}2 & -6 & 2\\ 0 & 0 & 2\sqrt{2}\\ 0 & 4\sqrt{2} & -2\sqrt{2}\end{pmatrix}x.$$

如果不要求知道坐标变换式,例 3 中二次曲线的简化方程很容易得到. 二次曲线 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3+2x_1x_3-6x_1x_2=0$ 是非退化和有实轨迹的,按照性质 3.2.10,它的简化方程可表示为

$$x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2=0.$$

又例如二次曲线 $5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3-8x_1x_3=0$ 的矩阵 $\begin{pmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{pmatrix}$ 是正定矩阵,此二次曲线是非退化和没有实轨

迹的.由性质 3.2.10,它的简化方程可表示为

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = 0.$$

由前面的讨论,有下面比较有用的性质,这性质在讨论仿射与欧氏二次曲线时也常要用到.

性质 3.2.11 如图 3-2-7,设一直线交二次曲线于 A,B,点 C 是 A,B 处切线的交点.过 C 的任一直线与二次曲线交于 P,Q,与直线 AB 交于 E,那么

(i) P,Q 处的切线的交点 F 在直线 AB 上;

(ii) $R(AB,EF)=-1, R(CE,PQ)=-1$;

(iii) CEF 是自极三点形.

证明留作练习.

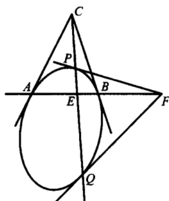


图 3-2-7

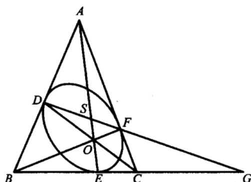


图 3-2-8

例 4 如图 3-2-8,三点形$\triangle ABC$ 切于二次曲线,切点分别是 D,E,F,则三直线 AE,CD,BF 交于一点.

证 设 CD,BF 交于一点 O,DF 交 BC 于 G,则 G 的极线是 AE.设 DF 交 AO 于 S,$R(DF,SG)=-1$,G 与 S 也共轭,AO 也是 G 的极线,所以 A,O,E 共线.

从上面的讨论也可以得到极点、极线的作法.要注意的是二次

曲线如果有实轨迹,那么它的自极三点形的顶点中有一个在二次曲线的内部,是无切线点;另外两个在二次曲线的外部,是二切线点.

3.2.3 对射

前面我们说明了对于每一条非退化的二次曲线,存在一个配极变换,它把射影平面上的点变成二次曲线的极线,把二次曲线上的点变成切线.另一方面,在第二章讨论了射影平面上的直射变换,它把平面上的点变成点,直线变成直线,并且保持点与直线的结合关系.射影几何就是研究在所有直射下不变的性质,叫射影性质.下面介绍射影平面上另一类变换——对射,它把点变成直线,直线变成点,对射可以看作是配极变换的推广.

定义 3.2.5 映射 ψ 把射影平面上的点变成直线,射影坐标下

$$\psi:\rho\begin{pmatrix}\xi_1'\\ \xi_2'\\ \xi_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad |a_{ij}|\neq 0,$$

称 ψ 是对射,也叫点线变换,映射 ψ 常简记为 $\psi:\rho\xi'=Ax$.

对射 ψ 的逆变换把射影平面上的直线变成点:

$$\psi^{-1}:\rho x'=A^{-1}\xi.$$

下面讨论对射的性质,着重说明对射与对偶原理的关系,以及如何将对偶原理运用于射影二次曲线.

性质 3.2.12 (i) 对射把共线的点变成线束中直线,因此对射诱导射影平面上把直线变成点的映射.对射也保持点与直线的结合关系;

(ii) 对射保持共线四点的交比.

证 设 A,B,C,D 是直线 ξ 上四点,假设 $c=\lambda_1 a+\lambda_2 b, d=\mu_1 a+\mu_2 b$,故 $R(AB,CD)=\dfrac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2}$.在对射 $\psi:\rho\xi'=Ax$ 下,四点 A,B,C,D 的像的线坐标分别是 Aa,Ab,Ac,Ad,且

$$Ac = \lambda_1 Aa + \lambda_2 Ab, \ Ad = \mu_1 Aa + \mu_2 Ab,$$

所以它们共点，且 $R(\psi(A)\psi(B), \psi(C)\psi(D)) = R(AB, CD)$. 这也证明了对射 ψ 把射影平面上直线上点变成线束中直线. 设直线 ξ 上点变成线束 P' 中直线，这样 ψ 诱导射影平面上直线到点的映射，也记为 ψ，$\psi(\xi) = P'$. 限制 ψ 于直线 ξ 上点得到点列 ξ 与线束 P' 的一维射影映射. 对射 ψ 把共线的点变成共点的直线，同样可以证明 ψ 把共点的直线变成共线的点. 所以对射保持射影平面上点与直线的结合关系，如图 3－2－9 所示.

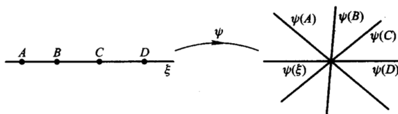


图 3－2－9

不难证明对射 $\psi: \rho\xi' = Ax$ 诱导的直线到点的映射是

$$\psi: \rho x' = (A^{-1})^{\mathrm{T}} \xi.$$

如果(P)是射影平面上关于点与直线以及它们的结合关系的命题. 由于对射把直线变成点，而把点变成直线，并且保持结合关系，因此把对射应用于命题(P)就得到它的对偶命题. 如果命题(P)成立，并且它的证明可以用点与直线的结合关系来叙述，把对射应用于此证明就得到对偶命题的证明.

下面讨论一般对射与由二次曲线决定的配极变换之间的关系. 设 $\psi: \rho\xi' = Ax$ 是射影平面 P^2 上的对射. 对于 P^2 上任一点 P，$\psi(P)$是直线，按照前面讨论，$\psi^2(P) = \psi(\psi(P))$仍然是射影平面的点. 利用 $\psi: \rho x' = (A^{-1})^{\mathrm{T}}\xi$ 不难得到

$$\psi^2: \rho x' = (A^{-1})^{\mathrm{T}} Ax,$$

ψ^2 是射影平面上的直射.

性质 3.2.13 对射 ψ 诱导的直射 ψ^2 是恒同映射(即 $\psi^2=I$)的充要条件是 A 是非退化的对称矩阵.

证 $\psi^2=I$ 的充要条件是 $\rho x'=(A^{-1})^{\mathrm{T}}Ax$ 是射影平面上的恒同,也以 I 表示三阶单位矩阵.所以 $\psi^2=I$ 的充要条件是存在非零常数 ρ 使

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}A=\rho I,\ 即\ A=\rho A^{\mathrm{T}}.$$

从 $|A|=\rho^3|A^{\mathrm{T}}|=\rho^3|A|$ 知道 $\rho=1$.因此 ψ^2 是恒同的充要条件是 A 是非退化的对称矩阵.

在对射 $\psi:\rho\xi'=Ax$ 的变换矩阵是对称矩阵时,对射影平面上任一点 P,它的像 $\xi=\psi(P)$,则 $P=\psi^2(P)=\psi(\xi)$,这时对射 ψ 交换任意一对对应元素.这样的对射也确定一条二次曲线:$x^{\mathrm{T}}Ax=0$,对射 ψ 刚好是这一条二次曲线的配极变换.上面性质说明如果 ξ 是 P 的极线,那么 P 是 ξ 的极点.这样的对射 ψ 叫做是对合的.这证明了:

非退化的二次曲线与对合的对射之间存在着一一对应.

下面讨论如何把对偶原理运用于射影二次曲线.设 $\Gamma:x^{\mathrm{T}}Bx=0$ 是射影平面上非退化的二次曲线,在对射 $\psi:\rho\xi'=Ax$ 下,二次曲线上点 $P(x)$ 成为直线 $\xi=\psi(P)$,其线坐标是 $\xi=Ax$.由于 $P(x)$ 满足 $x^{\mathrm{T}}Bx=0$,$\psi(P)=\xi$ 满足

$$\xi^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}BA^{-1}\xi=0.$$

显然这是一条非退化的二级曲线的方程.这证明了下面性质的前面一部分结论.

性质 3.2.14 对射把二阶曲线变成二级曲线,把二级曲线变成二阶曲线.并且对射把关于二阶曲线的任意一对极点、极线变成关于二级曲线的极线、极点,反之亦对.

证 采用上面记号,设 $P_0(x_0)$ 与 ξ_0 是二次曲线 Γ 的一对极点、极线,$\xi_0=Bx_0$.它们在对射 ψ 下的像分别是 $\psi(P_0)$,坐标 Ax_0 和点 $\psi(\xi_0)$,坐标 $(A^{-1})^{\mathrm{T}}\xi_0=(A^{-1})^{\mathrm{T}}Bx_0$.二次曲线 Γ 在对射下的像 $\psi(\Gamma)$ 是二级曲线 $\xi^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}BA^{-1}\xi=0$.直线 $\psi(P_0)$ 关于此二级

曲线的极点的坐标是$(A^{-1})^{\mathrm{T}}BA^{-1}Ax_0=(A^{-1})^{\mathrm{T}}Bx_0$,它就是点$\psi(\xi_0)$.因此$\psi(P_0)$与$\psi(\xi_0)$关于二级曲线$\psi(\Gamma)$互为极线,极点.特别,如果$P_0$是$\Gamma$上点,那么$\psi(P_0)$也是二级曲线$\psi(\Gamma)$中直线,也可以看成是$\psi(\Gamma)$决定的二阶曲线上的切线.

从此性质知道,一个关于射影二次曲线的极点、极线及其结合关系的命题经过对射可得到另一个命题,这个命题就是原命题的对偶命题.这样,对偶原理同样可应用于射影二次曲线.

由于二级曲线总是某个二阶曲线的切线的集合.在具体写出有关二次曲线的对偶命题时,可以把二次曲线的切点、切线对偶成另一条二次曲线切线、切点;而把极点、极线分别对偶成极线、极点.

例如,设A,B,C,D是二次曲线上相异四点,点$M=AC\times BD,N=AD\times BC,S$是$A,B$处切线的交点,$T$是$D,C$处切线的交点,那么$M,N,S,T$共线.

它的对偶命题可以按照上面的方法写成:

设ξ,η,ζ,θ是二次曲线上相异的四条切线,由此可得直线$\alpha=(\xi\times\zeta)\times(\eta\times\theta),\beta=(\xi\times\theta)\times(\eta\times\zeta),\gamma$是$\xi,\eta$上切点的连线,$\tau$是$\zeta,\theta$上切点的连线,那么四直线$\alpha,\beta,\gamma,\tau$共点.

图3-2-10(a)与3-2-10(b)是实现上面对偶命题的一对对偶图形,在§3.3将证明图3-2-10(a)表示的命题是正确的,从而它的对偶命题也成立.图3-2-10(a)中直线ST的对偶是图

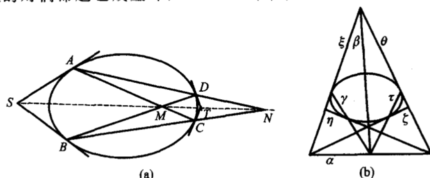


图3-2-10

3-2-10(b)中点 $\alpha\times\beta$，直线 ST 与二次曲线交于两点，而过 $\alpha\times\beta$ 二次曲线有两条切线.

图 3-2-11(a)与图 3-2-11(b)也是实现上述对偶命题的一对对偶图形，它们和图 3-2-10(a)与图 3-2-10(b)的区别在于 A,B,C,D 以及 ξ,η,ζ,θ 在二次曲线上的顺序不同.

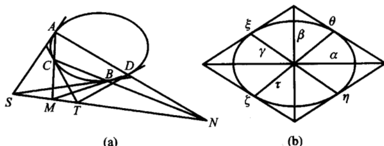


图 3-2-11

习题 3.2

1. 设二次曲线 $\Gamma: 2x_1^2+x_2^2-2x_1x_3+2x_2x_3=0$，

(1) 求点 $A(1,1,0)$的极线及 $\eta(1,1,0)$的极点；

(2) 求点 $B(1,-1,0)$，$C(0,1,-1)$在直线 $\xi(1,0,0)$上的共轭点，并求直线 ξ 上的自共轭点；

(3) 求 Γ 决定的二级曲线的方程.

2. 设二次曲线的一个自极三点形是坐标三点形，且点 $A(1,2,3)$的极线是 $\eta(3,2,1)$，试求这条二次曲线的方程.

3. 利用自极三点形化简二次曲线：

(1) $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=0$；

(2) $2x_1^2+3x_2^2-3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3+2x_1x_3=0$；

(3) $2x_1^2+3x_2^2-2x_2x_3+3x_3^2=0$.

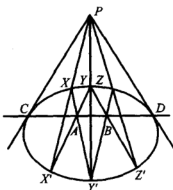
4. 设两条二次曲线 Γ 和 Γ' 交于四点，则可取射影坐标，使 Γ 与 Γ' 的方程分别为

$$\Gamma: a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2=0,\ a_1a_2a_3\neq 0,$$

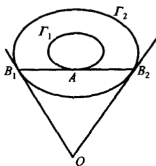
$$\Gamma': b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 = 0,\ b_1 b_2 b_3 \neq 0.$$

5. 设 P,Q 是二次曲线上的动点，P,Q 处切线的交点在一条定直线上，试证直线 PQ 过一个定点.

6. 如图，过二次曲线外一点 P 的三直线分别交二次曲线于 X,X',Y,Y',Z,Z'，设 $A=XY'\times X'Y$，$B=YZ'\times Y'Z$，C,D 是直线 AB 与二次曲线的交点，试证 PC,PD 是切线.



习题 6



习题 7

7. 设 Γ_1,Γ_2 是两条二次曲线，如果 Γ_1 上任一点 A 处切线交 Γ_2 于 B_1，B_2，试证 B_1,B_2 处关于 Γ_2 的切线的交点 Q 在第三条二次曲线上.

§3.3 Pascal 定理与 Brianchon 定理

射影平面上相异六点按照一定的顺序构成六点形，相邻两点的连线叫六点形的边，六点是六个顶点. 六点形的边可分成三组，每一组的两边叫一对对边. 如图 3-3-1，六点形 $ABCDEF$ 的三对对边是 AB 与 DE，BC 与 EF，CD 与 FA. 六点形 $ADBEFC$ 的顶点与六点形 $ABCDEF$ 相同，但顺序不同，把它们看成不同的六点形，六点形 $ADBEFC$ 的三对对边是 AD 与 EF，DB 与 FC，BE 与 CA.

如果六点形的顶点都在二次曲线上，那么称六点形是二次曲线的内接六点形. 如果二次曲线非退化，那么六个顶点中没有三点共

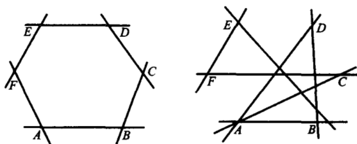


图 3-3-1

线.关于非退化二次曲线的内接六点形有下面的重要定理.

定理 3.3.1(Pascal) 二次曲线的内接六点形的三对对边的交点共线.

证 如图 3-3-2,设 $AB'CA'BC'$ 是二次曲线的内接六点形,它的三对对边的交点是

$$P=AB'\times A'B,\ Q=B'C\times BC',\ R=CA'\times C'A,$$

要证明 P,Q,R 共线.

利用 Steiner 定理得到下列射影映射

$$A(AA',AB',AC',AB,\cdots)\barwedge C(CA',CB',CC',CB,\cdots).$$

设 $U=AC'\times A'B$, $V=A'C\times BC'$,利用线束 A 与直线 $A'B$ 之间透视,线束 C 与直线 BC' 之间透视可得:

$$A'B(A',P,U,B,\cdots)\barwedge BC'(V,Q,C',B,\cdots),$$

由于 B 是自对应点,这映射是透视.因此 $A'V,PQ,UC'$ 交于一点(透视中心),即 P,Q,R 共线.

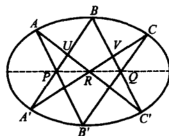


图 3-3-2

值得注意的是,此定理的叙述与证明都与 Pappus 定理相似,实际上射影平面上两直线构成图形可以看成退化的二次曲线.如果图 3-3-2 中三点 A,B,C

在一直线上，A', B', C' 在另一直线上，则 P, Q, R 是三点组 $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ 的 Pappus 线上三点. Pappus 定理可以看成是 Pascal 定理的特殊情况.

图 3－3－2 中，P,Q,R 所在的直线叫 **Pascal 线**. 由二次曲线上取定六点可以组成 $5! = 120$ 个不同的六点形，但其中每一个六点形有另一个六点形与它的顶点顺序刚好相反. 如 $ABCDEF$ 与 $AFEDCB$，这样的两个六点形的 Pascal 线相同. 所以给定二次曲线上六点，按照不同的顺序组成六点形，最多可能有 60 条不同的 Pascal 线.

Pascal 定理的逆定理是

定理 3.3.2 如果无三点共线的六点构成六点形的对边交点共线，则此六点内接于一条二次曲线.

证 如图 3－3－3，设六点形 $AB'CA'BC'$ 的对边交点 P, Q, R 共线，采用定理 3.3.1 证明中记号，则有

$$A(AA', AB', AC', AB, \cdots) \overline{\wedge} A'B(A', P, U, B, \cdots)$$

$$\overset{R}{\overline{\wedge}} BC'(V, Q, C', B, \cdots) \overline{\wedge} C(CA', CB', CC', CB, \cdots),$$

所以

$$A(AA', AB', AC', AB, \cdots) \wedge C(CA', CB', CC', CB, \cdots),$$

由于对应直线交点 A', B', C', B 不共线，它不是透视，根据 Steiner 定理，这一射影映射的对应直线交点及线束中心在一条二次曲线上，这证明了 A, B, C, A', B', C' 在二次曲线上.

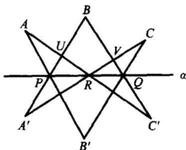


图 3－3－3

Pascal 定理也给出了作由给定五点决定的二次曲线上其他点的方法：

设 A, B, C, A', B' 是无三点共线的五点，过 $P = AB' \times A'B$ 任作一直线 α（参看图 3－3－3），记 $R = A'C \times \alpha$，$Q = B'C \times \alpha$，那么由 Pascal 定

理，$C' = AR \times BQ$ 就是由 A, B, C, A', B' 决定的二次曲线上点. 变动过 P 的直线 α，可以得到二次曲线上不同的点.

六点形的对偶图形是由按照一定顺序的六条直线构成的图形，叫六线形或六边形. 六边形相邻两直线的交点叫顶点，六个顶点分成三对对顶点. 例如六边形 $\xi\eta\zeta\phi\theta\psi$，它的三对对顶点分别是 $\xi \times \eta$ 与 $\phi \times \theta$，$\eta \times \zeta$ 与 $\theta \times \psi$，$\zeta \times \phi$ 与 $\psi \times \xi$. 二阶曲线的外切六边形可以看成是对应的二级曲线中六直线构成的图形. 由于二级曲线与二阶曲线互为对偶图形，从对偶原理知道下面的定理成立.

定理 3.3.3(Brianchon) 外切于二次曲线的六边形的三对对顶点的连线交于一点，此点叫六边形的 **Brianchon** 点.

与 Pascal 定理一样，外切六边形按照不同的顺序最多有 60 个不同的 Brianchon 点. Brianchon 定理的逆定理也成立，它可以叙述成：

如果六边形的三对对顶点连线交于一点，则此六边形外切于某条二次曲线.

Pascal 定理与它的逆定理都叫做 Pascal 定理，Brianchon 定理与它的逆定理也都叫 Brianchon 定理.

图 3-3-4(a)是二次曲线外切六边形 $\xi\eta\zeta\phi\theta\psi$ 的情形，O 是它的 Brianchon 点. 图 3-3-4(b)是外切六边形 $\xi\eta\phi\zeta\theta\psi$ 的情形，E

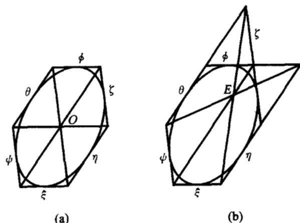


图 3-3-4

是相应的 Brianchon 点. 利用 Brianchon 定理也可以从已知二次曲线的五条切线作出其他切线. 如果图 3-3-4(a)中 $\xi, \eta, \zeta, \phi, \theta$ 是已知的五条切线,可作出直线$(\xi \times \eta) \times (\phi \times \theta)$,取此直线上不同点 O 得到二次曲线的不同切线.

Pascal 定理与 Brianchon 定理可以运用到六点形或六边形的顶点或边有重合的情况,这种六点形或六边形叫*退化六点形*或*退化六边形*. 如图 3-3-5, A, B 是二次曲线上两点, A, B 的连线是二次曲线的割线,如果点 B 沿二次曲线逼近 A. 那么直线 AB 逼近 A 处的切线. 类似地 ξ, η 是二次曲线的切线,切点分别是 P, Q,当点 Q 向 P 逼近时, Q 处的切线向 ξ 逼近,而 ξ 与 η 的交点也向 P 逼近. 这与二次曲线的切点切线的定义是一致的:与二次曲线交于二重点的直线是切线,二重点是切点;线二次曲线中每条直线上有一点,过此点只有一条直线(二重直线)属于此二级曲线. 如果把退化六点形看成一般六点形的极限情形,那么 Pascal 定理可以用到二次曲线的退化内接六点形. 同样, Brianchon 定理可以推广到二次曲线的退化外切六边形.

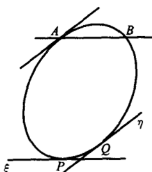


图 3-3-5

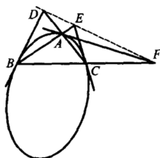


图 3-3-6

例如,设 A, B, C 是二次曲线上三相异点,将 A, B, C 分别看作二重点,考虑退化六点形 $AABBCC$,由上面说明我们把 AA, BB, CC 分别看作 A, B, C 处切线. 如图 3-3-6,设 A 处切线与

BC 交于 F, AB 与 C 处切线交于 E, AC 与 B 处切线交于 D, 由 Pascal 定理, F,E,D 共线, 如图 3－3－7, 设直线 ξ,η,ζ 外切于二次曲线, 切点是 A, B, C, 由 ξ,η,ζ 生成退化外切六边形 $\xi\xi\eta\eta\zeta\zeta$, 根据 Brianchon 定理, 直线 AA', BB', CC' 交于一点, 设为 O, 其中 $A'=\zeta\times\eta$, $B'=\zeta\times\xi$, $C'=\xi\times\eta$. 因此图 3－3－7 中三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 关于 O 透视, 此两三点形的透视轴是三点形 ABC 看作退化六点形时的 Pascal 线.

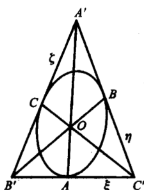


图 3－3－7

例 1 设 A,B,C,D 是二次曲线上相异四点, 四点处切线依次是 ξ,η,ζ,ϕ, 那么下列四点共线:

$$M=AC\times BD,\ N=AD\times BC,\ S=\xi\times\eta,\ T=\zeta\times\phi.$$

证 法 1): 如图 3－3－8, 考虑二次曲线的退化六点形 $CCBDDA$, 它的 Pascal 线是过

$$T=\zeta\times\phi,\ N=CB\times DA,\ M=BD\times AC$$

的直线. 再考虑退化六点形 $AADBBC$, 由 Pascal 定理 S,M,N 共线, 因此 S,M,T,N 四点共线.

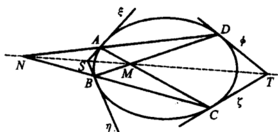


图 3－3－8

法 2): 记 $E=AB\times CD$, 则 E,N,M 是二次曲线的自极三点形, E 的极线是 MN. 由于 S 的极线是 AB, T 的极线是 CD, 所以

S,T 与 E 也共轭. 因此 S,M,T,N 都在 E 的极线上,它们共线.

例 2 设 A,B,C,D,E,F 是二次曲线上六点. 试证,六点形 $ABCFED$, $ABEDCF$ 与 $ADCBEF$ 的三条 Pascal 线交于一点.

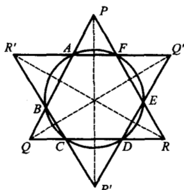


图 3-3-9

证 如图 3-3-9, PP', QQ', RR'分别是二次曲线内接六点形 $ABCFED$, $ABEDCF$, $ADCBEF$ 的 Pascal 线,要证明 PP', QQ', RR'交于一点,即三点形 PQR 与 $P'Q'R'$成透视. 考虑六点形 $ABCDEF$,由 Pascal 定理

$$AB\times DE=PQ\times P'Q',\ BC\times EF=P'R'\times PR,\ CD\times FA=QR\times Q'R'$$

共线,所以三点形 PQR 与 $P'Q'R'$成透视.

对于二次曲线上取定的六点,按照不同的顺序最多可有 60 条不同的 Pascal 线. 例 2 证明了这 60 条 Pascal 线可分成 20 组,其中每组三条 Pascal 线交于一点. 从一个六点形得到同一组内另外两个六点形的方法可按照例 2 的方法进行. 对于任意二次曲线内接六点形 $ABCDEF$,将顶点按顺序分成 AB,CD,EF,然后交换其中两对得 $ABEFCD$, $EFCDAB$ 或 $CDABEF$,这三个六点形只是起点写法不同,实际上是同一个六点形;再按照 BC,DE,FA 将六点 A,B,C,D,E,F 分成三组,类似可得另一个六点形 $DEBCFA$. 这样得到的三个六点形 $ABCDEF$, $ABEFCD$, $DEBCFA$ 的 Pascal 线交于一点.

根据 Steiner 定理,下例可以看成是 §2.2 中例 1 的进一步讨论,它同时给出了性质 3.2.8 中对合的对应点的作法.

例 3 设 P 是二次曲线 Γ 上两点 A,B 处切线的交点,ξ 是过 P 的直线,对于 Γ 上任一点 C,设 Q 是 AC 与 ξ 的交点,Q'是 BC 与 ξ 的交点,则 Q,Q'关于 Γ 共轭.

证 设 AQ' 与二次曲线 Γ 交于另一点 C'，记 $AC \times BC' = R$。类似例 1，对退化六点形 $AACBBC'$ 运用 Pascal 定理可知 P, Q', R 共线。所以三直线 AC, BC', ξ 交于一点，即 Q 与 R 重合。由于 $ABC'C$ 构成 Γ 的内接四点形，Q, Q' 共轭。

图 3－3－10 是 Γ 与 ξ 交于两点的情况，此两交点是 ξ 上由 $Q \to Q'$ 确定的对合的不动点。

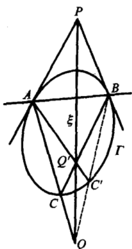


图 3－3－10

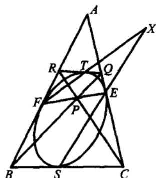


图 3－3－11

例 4 如图 3－3－11，设三点形 ABC 三边分别与二次曲线切于 S, E, F，设 P 为 EF 上任一点，记 $Q = BP \times AC$，$R = CP \times AB$，试证：

(1) QR 是二次曲线的切线；

(2) 直线 BP 与 CP 关于二次曲线共轭。

证 (1) AB, AC, BC 是二次曲线的切线，F, E 分别是 AB，AC 上切点，对 AB, AB, RQ, AC, AC, BC 所成退化六边形用 Brianchon 定理，可知 QR 是二次曲线的切线。

(2) 设 T 是 QR 上切点，$X = SE \times FT$ 与 R, C 都共轭，X 的极线是 $CR = CP$。由于 B, P, Q, X 共线，BP 过 CP 的极点 X，BP

与 CP 关于二次曲线共轭.

例 4 中(2)也可以叙述成:

如图 3-3-11,设二次曲线的一切线与另外两切线 AB,AC 交于 B,C,EF 是 AB,AC 上切点的连线,则线束 B,C 之间以 EF 为透视轴的透视的每一对对应直线是关于二次曲线的共轭直线.

例 3 可以叙述成:

如图 3-3-10,A,B,C 是二次曲线上点,P 是 A,B 处切线的交点,则点列 AC,BC 之间以 P 为透视中心的透视的每一对对应点是一对共轭点.

所以,例 3 与例 4(2)可以看作一对对偶命题.

前面已介绍过,利用 Pascal 定理与 Brianchon 定理可解决一些有关二次曲线切点切线的作图问题,下面再举一例.

例 5 如图 3-3-12(a),已知 ξ,η,ζ,ϕ 是射影平面上没有三直线交于一点的四直线,A 是直线 ξ 上一点,求作以 ξ,η,ζ,ϕ 为切线,且 A 是 ξ 上切点的二次曲线上任一切线,并作出直线 η 上的切点.

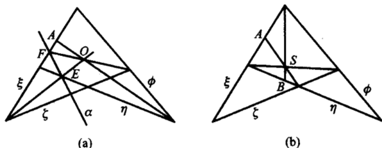


图 3-3-12

解 (1) 在 A 与 $\eta\times\phi$ 的连线上任取一点 O,过 O 与 $\xi\times\zeta$ 的直线交 η 于 E;过 O 与 $\zeta\times\phi$ 的直线交 ξ 于 F,得直线 $\alpha=EF$.对退化六边形 $\xi\xi\zeta\phi\eta\alpha$ 运用 Brianchon 定理,可知 α 是以 ξ,η,ζ,ϕ 为切线,A 是 ξ 上切点的二次曲线上的一条切线.随着 O 的不同选

取，可以得到二次曲线的不同切线.

(2) 考虑退化六边形 $\xi\xi\eta\eta\zeta\phi$，如图 3-3-12(b)，设 S 是它的 Brianchon 点，S 是 $A\times(\eta\times\zeta)$，$(\xi\times\eta)\times(\zeta\times\phi)$的交点. 直线 η 与 $S\times(\xi\times\phi)$的交点 B 就是 η 上切点. 同理可以作出其他切线上的切点.

习题 3.3

1. 设 A,B,C,D 是二次曲线 Γ 上四定点，P,Q 是 Γ 上动点，$R=PA\times QC$，$T=PB\times QD$，试证 RT 过一定点.

2. 设 $ABCDE$ 是二次曲线 Γ 的内接五点形，A 处切线是 ξ，那么下面三点

$$X=\xi\times CD,\ Y=AB\times DE,\ Z=BC\times EA$$

共线.

3. 设 A,B,C,D 是二次曲线 Γ 上点，AC 与 D 处切线交于 P，DB 与 C 处切线交于 Q，求证三直线 PQ,AB,CD 共点.

4. 设三点形 ABC 内接于二次曲线，P 是 B,C 处切线的交点，ξ 是 A 处切线，试证四直线 AB,AC,AP,ξ 成调和直线.

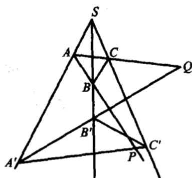
5. 设 P,P'是二次曲线 Γ 上两点，M 是 Γ 上另一点 Q 与 P 处的切线的交点，$N=P'Q\times PM$，点 S 是 PP'的极点，试证 $R(PN,MS)=-1$.

6. 设 A,B,C 是不共线三点，ξ,η 分别是过 A,B 的直线，设二次曲线 Γ 过 A,B,C，且 A,B 处切线是 ξ,η，试作：

(1) C 处切线；(2) 求作 Γ 上另一点 D.

7. 设 Γ 是由射影平面上无三点共线的五点决定的二次曲线，求作过此五点中任一点的 Γ 的切线.

8. 设三点形 ABC 与 $A'B'C'$关于 S 成透视，$P=AB\times A'C'$，$Q=AC\times A'B'$，则 P,Q,B,B',C,C'在一条二次曲线上.



习题 8

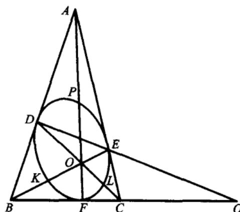
9. 如图，三点形 ABC 外切于二次曲线 Γ，切点分别是 D,E,F；$Q=DE\times BC$，AF 交 Γ 于另一点 P，BE,DC 分别交 Γ 于 K，

L,求证,

(1) PQ 是 P 处切线;

(2) KL 过点 Q;

(3) K,L 处切线交点在 AF 上.



习题 9

10. 在欧氏平面上,四边形 $ABCD$ 的四边 AB,BC,CD,DA 分别切一圆于 E,F,G,H,求证

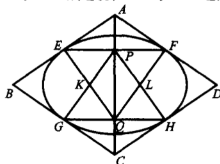
(1) AC,BH,DE 共点;

(2) AC,BD,HF,GE 共点.

11. 如图,设四边形 $ABCD$ 外切于二次曲线,切点分别是 E,G,H,F;$P = AC\times EF$,$Q = AC\times GH$,$K = EQ\times GP$,$L = QF\times PH$.求证

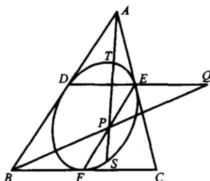
(1) B,K,L,D 共线;

(2) 三点形 AEF 与 CGH 成透视,AEF 与 CHG 也成透视.



习题 11

12. 设三点形 ABC 外切于二次曲线 Γ，切点分别是 D,E,F. 设 P 是 EF 上任一点，$Q=BP\times DE$. 试证 P,Q 关于二次曲线共轭，如果 AP 交 Γ 于 T，S，则 QT,QS 是二次曲线的两切线.



习题 12

13. 设 ξ,η,ζ,ψ 外切于二次曲线 Γ，试证 $\xi\eta\zeta\psi$ 的对角三线形 $\alpha\beta\gamma$ 是 Γ 的自极三线形. 如果 A,B,C,D 分别是 ξ,η,ζ,ψ 上的切点，证明四点形 $ABCD$ 关于二次曲线的自极三点形的三边就是 α,β,γ.

§3.4 射影二次曲线的分类

3.4.1 射影二次曲线的分类

给定射影平面上一条二次曲线 $\Gamma: x^{\mathrm{T}}Ax=0$，它的矩阵 $A=(a_{ij})$ 是对称的. 如果 Γ 退化，那么二次曲线上有奇点，并且它与 Γ 上其他点的连线也在 Γ 上. 在 §3.1 证明了退化的二次曲线只能是下列三种情况之一：

(1) 一点；(2) 两条相交直线；(3) 一直线.

如果二次曲线 Γ 非退化，那么可取自极三点形作为坐标三点形将二次曲线方程化简成：

$$b_1x_1^2+b_2x_2^2+b_3x_3^2=0,\ b_1b_2b_3\neq 0.$$

二次曲线的方程除了根据它的几何性质进行化简外，还可用高等代数关于二次型的理论讨论.设 $y=(y_1,y_2,y_3)$ 是射影平面上另一坐标系下点的坐标，$\rho x=By$ 是相应的坐标变换公式，代入 Γ 的方程 $x^{\mathrm{T}}Ax=0$，得 Γ 在坐标 y 下表示式：$y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}ABy=0$.因此二次曲线 Γ 在坐标 y 下的矩阵 $B^{\mathrm{T}}AB$ 是 A 的合同矩阵，进行坐标变换 $\rho x=By$，相当于对对称矩阵 A 进行合同变换.在对 A 进行合同变换时，A 的秩是不变的.另一方面，对任意非奇异矩阵 B，由 $\rho x=By$ 可以确定射影平面上的射影坐标 y.

定理 3.4.1 二次曲线的方程经过适当的坐标变换总可以化为下列五种形式之一：

(ⅰ) $y_1^2+y_2^2+y_3^2=0$，(非退化但无实轨迹)；

(ⅱ) $y_1^2+y_2^2-y_3^2=0$，(非退化有实轨迹)；

(ⅲ) $y_1^2+y_2^2=0$，(一点)；

(ⅳ) $y_1^2-y_2^2=0$，(两相交直线)；

(ⅴ) $y_1^2=0$，(一直线).

证 设二次曲线 $\Gamma: x^{\mathrm{T}}Ax=0$，矩阵 A 是对称矩阵，其分量不全为0.根据二次型理论，存在非退化矩阵 B，使 $B^{\mathrm{T}}AB$ 是对角矩阵，设

$$B^{\mathrm{T}}AB=\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

由于矩阵 A 非零，b_1,b_2,b_3 不全为0，且 b_i 中不为0的个数等于矩阵 A 的秩.作坐标变换 $\rho x=Bx'$，在坐标 x' 下，二次曲线 Γ 的方程是

$$b_1x_1'^2+b_2x_2'^2+b_3x_3'^2=0.$$

对矩阵 A 的秩以及 b_1,b_2,b_3 的符号进行讨论，Γ 可以进一步化简为定理中五种形式之一.

这就是射影二次曲线的分类，在§2.3结束时，我们曾讨论过

射影坐标变换与直射变换表示的关系. $\rho x' = Bx$ 可以看成是坐标变换,也可看成是某个直射的表示式. 在后一种情形, x, x' 为同一坐标系下点的坐标,点 $P(x)$ 在此直射下的像 P' 的坐标是 $x' = Bx$. 这说明了定理 3.4.1 中同一类中任意两条二次曲线总存在一个直射变换,把其中一条变为另一条;定理 3.4.1 中关于二次曲线的分类是直射变换下不变的. 我们称直射变换下对应的图形是射影平面上的全等图形,这证明了:

射影平面上所有非退化有实轨迹的二次曲线都是全等的.

在 §4.1,我们证明了非退化有实轨迹的二次曲线也可以化简为

$$x_2^2 - x_1 x_3 = 0,$$

这时直线 $x_1 = 0$ 与 $x_3 = 0$ 是它的两条切线.

3.4.2 二次曲线束

下面简要的介绍一些二次曲线束的知识.

设 $\Gamma_1 : \sum a_{ij} x_i x_j = 0$ 与 $\Gamma_2 : \sum b_{ij} x_i x_j = 0$ 是两条二次曲线. 如果 Γ_1 与 Γ_2 中有一条是非退化的,那么 Γ_1 与 Γ_2 最多交于四点. 如果 Γ_1 与 Γ_2 都是退化的,那么 Γ_1 与 Γ_2 的交点也可能构成直线. 由于 Γ_1 与 Γ_2 是两条不同的二次曲线,它们的系数矩阵 (a_{ij}) 与 (b_{ij}) 不成比例,因此对任意不全为 0 的实数 λ, μ, $\lambda(a_{ij}) + \mu(b_{ij}) = (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})$ 不可能是零矩阵. 这样

$$\lambda \sum a_{ij} x_i x_j + \mu \sum b_{ij} x_i x_j = 0$$

总表示一条二次曲线,所有这样的二次曲线构成**二次曲线束**. 易见二次曲线束中任一曲线总是通过 Γ_1 与 Γ_2 的交点. 对于射影平面上任一点 P,以 P 的坐标代入二次曲线束的方程,在一般情况下(P 不是 Γ_1 与 Γ_2 的交点)可以决定 $\lambda : \mu$,从而确定过 P 的二次曲线束中的曲线.

例 1 如果两条非退化的二次曲线 Γ_1 与 Γ_2 交于四个点,则

存在点 P，使得过 P 关于 Γ_1 与 Γ_2 的四条切线上的切点共线．如果 Γ 是由 Γ_1 与 Γ_2 决定的二次曲线束中任一条非退化的二次曲线；则过 P 关于 Γ 的切线上的切点也在这条直线上（这时过 P 关于 Γ 的切线可能是虚切线，切点是虚点）．

证 设 A,B,C,D 是 Γ_1 与 Γ_2 的交点，由假设 Γ_1 与 Γ_2 非退化，$ABCD$ 是完全四点形，设它的对角三点形是 PQR，PQR 关于 Γ_1 与 Γ_2 都是自极三点形．由于 P,Q,R 关于 Γ_1 只有一点在内部（是无实切线点），同样的情况对 Γ_2 也成立．所以 P,Q,R 中有一点在 Γ_1 与 Γ_2 的外部，不妨设是 P．图3－4－1是 P,Q 都在 Γ_1 与 Γ_2 外部的情况．所以过 P 关于 Γ_1 与 Γ_2 的切线的切点都在 QR 上．如果 Γ 是 Γ_1 与 Γ_2 决定的二次曲线束中任一条非退化的二次曲线，则 PQR 也是 Γ 的自极三点形．如果 QR 与 Γ 交于两点，那么过 P 关于 Γ 的切线的切点也在 QR 上；如果 QR 与 Γ 交于一对共轭虚点，那么 P 与它们的连线就是 Γ 的两条虚切线．

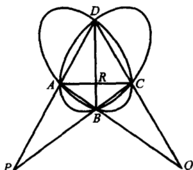


图 3－4－1

读者能否找出过图 3－4－1 中四点 A,B,C,D 的非退化二次曲线，使得 P 成为它的内点．如果 X 是四点形 $ABCD$ 的六边上点，则过 X 的二次曲线束中曲线是退化的，它由完全四点形的一对对边组成．二次曲线束中其他二次曲线都是非退化的．

例 2 试求过五点 $A(1,0,-1)$，$B(1,0,1)$，$C(1,2,1)$，$D(1,2,-1)$，$E(1,3,0)$的二次曲线的方程（图 3－4－2）．

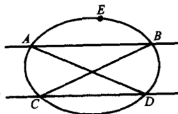


图 3－4－2

解 此题可用待定系数法，解一个

有六个未知元的齐次方程组.下面介绍二次曲线束的方法.

以 $AB\cdot CD$ 表示由直线 AB, CD 上点构成的退化二次曲线,同样,以 $AC\cdot BD$ 表示由 AC, BD 上点构成的退化二次曲线.通过简单计算可得:

$$AB\cdot CD:\ x_2(2x_1-x_2)=0,$$

$$AC\cdot BD:\ (x_1-x_2+x_3)(x_1-x_2-x_3)=0,$$

所以过 A,B,C,D 的二次曲线束是

$$\lambda x_2(2x_1-x_2)+\mu(x_1-x_2+x_3)(x_1-x_2-x_3)=0.$$

以 $E(1,3,0)$ 代入得 $-3\lambda+4\mu=0$,取 $\lambda=4,\mu=3$,代入整理得所求二次曲线

$$3x_1^2-x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2=0.$$

例 2 的方法改进以后可以用来解其他的一些问题.

性质 3.4.2 设 A,B 分别是直线 ξ,η 上两点,A,B 都不是 ξ,η 的交点,则由退化二次曲线 $\xi\cdot\eta$ 与 $AB\cdot AB$ 构成的二次曲线束中任一非退化二次曲线都以 ξ,η 为切线,且切点分别是 A,B.

证 设 $C=\xi\times\eta$,则 A,B,C 可构成坐标三点形,这时

$$\xi: x_2=0,\ \ \eta: x_1=0,\ \ AB: x_3=0.$$

所以性质中二次曲线束为

$$\lambda x_1x_2+\mu x_3^2=0.$$

对任意 $\lambda,\mu,\lambda\mu\neq0$, $\lambda x_1x_2+\mu x_3^2=0$ 都是非退化的二次曲线.它在 A 处切线是 ξ, B 处切线是 η.

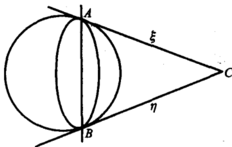


图 3-4-3

类似§3.3,如果四点 A,B,C,D 中有点重合的情况,例如 $A=C,B=D$,则 $AC=AA,BD=BB$ 可以分别看成 A 与 B 处切线,由 $\lambda AC\cdot BD+\mu AB\cdot CD=0$ 就得到性质 3.4.2 中二次曲线束:$\lambda\xi\cdot\eta+\mu AB\cdot AB=0$. 性质 3.4.2 也可以推广到其他情况.

例 3 求通过 $A(1,0,1),B(0,1,1),C(0,-1,1),D(3,4,5)$,且以 $\xi: x_1-x_3=0$ 为切线的二次曲线.

解 易见点 A 在直线 ξ 上,所以切线 ξ 上切点应为 A,记 $A'=A$. 由退化二次曲线 $AB\cdot A'C$ 与 $AA'\cdot BC$ 构成二次曲线束:

$$\lambda(x_1+x_2-x_3)(x_1-x_2-x_3)+\mu(x_1-x_3)x_1=0.$$

以 $D(3,4,5)$ 代入得 $2\lambda+\mu=0$,取 $\lambda=1,\mu=-2$,得所求二次曲线为:

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0.$$

例 4 求二次曲线 $\Gamma_1: 2x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3-x_2x_3+2x_3^2=0$ 与 $\Gamma_2: 3x_1^2+6x_1x_2-x_1x_3+3x_2x_3=0$ 的交点.

解 构造二次曲线束,方程是

$$(2\lambda+3\mu)x_1^2+(4\lambda+6\mu)x_1x_2+(-2\lambda-\mu)x_1x_3+(-\lambda+3\mu)x_2x_3+2\lambda x_3^2=0.$$

令它的系数行列式为 0,得

$$(2\lambda+3\mu)(15\lambda^2+28\lambda\mu+25\mu^2)=0.$$

取 $\lambda=-3,\mu=2$,得二次曲线束中一条退化的二次曲线

$$4x_1x_3+9x_2x_3-6x_3^2=0.$$

二次曲线束的方程中 x_1^2,x_1x_2 的系数都含 $2\lambda+3\mu$,其余项都有 x_3,从观察二次曲线束的方程也能得出这一退化二次曲线. Γ_1 与 Γ_2 的交点都在此退化的二次曲线上,它可以分解为

$$4x_1+9x_2-6x_3=0 \text{ 与 } x_3=0.$$

将 Γ_1 分别与它们联立得

$$(-3,2,1),(-18,14,9),(0,1,0),(2,-1,0).$$

它们也在 Γ_2 上,是 Γ_1 与 Γ_2 交点.

在 Γ_1 与 Γ_2 的方程中令 $x=\frac{x_1}{x_3}, y=\frac{x_2}{x_3}$,得

$$\begin{cases}2x^2+4xy-2x-y+2=0,\\ 3x^2+6xy-x+3y=0.\end{cases}$$

上面的方法可以用来解这个二元二次方程组.这就是代数中解二元二次方程组方法的几何背景,作为代数方程它的解为:

$$\begin{cases}x=-3,\\ y=2,\end{cases}\quad \begin{cases}x=-2,\\ y=\frac{14}{9}.\end{cases}$$

例 5 求二次曲线 $\Gamma_1: x_1^2-12x_2^2+16x_3^2+28x_1x_2+8x_1x_3+8x_2x_3=0$ 与 $\Gamma_2: 9x_1^2+x_2^2+36x_3^2+6x_1x_2-36x_1x_3+48x_2x_3=0$ 的公共切线.

解 二次曲线 Γ_1 与 Γ_2 的矩阵分别是

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 14 & 4\\ 14 & -12 & 4\\ 4 & 4 & 16\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}9 & 3 & -18\\ 3 & 1 & 24\\ -18 & 24 & 36\end{pmatrix}.$$

它们的伴随矩阵分别是

$$\widetilde{A}_1=\begin{pmatrix}-208 & -208 & 104\\ -208 & 0 & 52\\ 104 & 52 & -208\end{pmatrix},\ \widetilde{A}_2=\begin{pmatrix}-540 & -540 & 90\\ -540 & 0 & -270\\ 90 & -270 & 0\end{pmatrix}$$

所以 Γ_1 与 Γ_2 决定的二级曲线分别是

$$2\xi_1^2+4\xi_1\xi_2-2\xi_1\xi_3-\xi_2\xi_3+2\xi_3^2=0,$$

$$3\xi_1^2+6\xi_1\xi_2-\xi_1\xi_3+3\xi_2\xi_3=0.$$

由例 4 可知,这两条二级曲线的公共直线是

$$x_2=0,\ 2x_1-x_2=0,$$

$$3x_1-2x_2-x_3=0,\ 18x_1-14x_2-9x_3=0.$$

它们也是二次曲线 Γ_1 与 Γ_2 的公共切线.

习题 3.4

1. 设 $\Gamma_1:\sum a_{ij}x_ix_j=0$ 与 $\Gamma_2:\sum b_{ij}x_ix_j=0$ 是两条非退化的二次曲线，如果 ξ 是 Γ_1 与 Γ_2 的公共切线，且切点都是 P，则二次曲线束 $\sum(\lambda a_{ij}+\mu b_{ij})x_ix_j=0$ 中每一条非退化的二次曲线都以 ξ 为切线，切点也是 P.

2. 设 A,B,C 是不共线的三点，ξ 是过 A 的直线，B,C 都不在 ξ 上，试证二次曲线束 $\lambda\xi\cdot BC+\mu AB\cdot AC=0$ 中任一非退化的二次曲线都以 ξ 为切线，A 是切点.

3. 试证外接于坐标三点形的非退化的二次曲线可以写成：

$$a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{23}x_2x_3=0,\ a_{12}a_{13}a_{23}\neq 0.$$

4. 设三直线 $\xi:a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$，$\eta:b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$，$\zeta:c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0$构成三线形，证明过此三线形的顶点的非退化的二次曲线可以写成：

$$\lambda\sum a_ix_i\cdot\sum b_ix_i+\mu\sum a_ix_i\cdot\sum c_ix_i+\nu\sum b_ix_i\cdot\sum c_ix_i=0,\ \lambda\mu\nu\neq 0.$$

5. 设欧氏平面上二次曲线与 $x+y-1=0$ 在 $A(0,1)$处相切，并且过点 $B(-1,0)$，$C(-1,1)$，$D(0,0)$，求这条二次曲线.

6. 设 $A(1,0)$，$B(-1,0)$，$C(1,1)$，$D(-1,2)$是欧氏平面上四点，直线 $\xi:x-y+1=0$，试求过 A,B,C,D 且以 ξ 为切线的二次曲线.

7. 设 $A(1,0)$，$B(2,2)$，$C(1,1)$，$D(-1,2)$是欧氏平面上四点，直线 $\xi:x-y+1=0$，试求过 A,B,C,D 且以 ξ 为切线的二次曲线.

第四章

仿射几何与欧氏几何

这一章,我们从射影平面重新得到仿射平面与欧氏平面,并利用射影几何研究仿射与欧氏几何.在§4.1,通过将射影平面上的一直线特殊化,把它上面的点作为无穷远点定义仿射平面,并讨论仿射平面上直线的平行,共线点的单比等概念.在§4.2,讨论仿射平面上的二次曲线,用射影二次曲线的观点讨论仿射二次曲线的中心,直径等概念.在§4.3与§4.4,用射影几何观点讨论欧氏几何与欧氏平面上的二次曲线,讨论中使用了虚点与虚直线.

§4.1 仿射几何

4.1.1 仿射平面

在第一章,我们在欧氏平面上添加无穷远点与无穷远直线得到拓广欧氏平面,它是射影平面的一个模型.在拓广欧氏平面上,如果不涉及无穷远点与无穷远直线,距离、交角、平行性等概念还是有意义的.而在射影平面上,所有的点处于同等地位,点之间的距离与直线之间的夹角还没有适当的定义.由于射影平面上任两直线交于一点,射影平面上没有欧氏空间那样定义的平行线.下面讨论处于这两种几何之间的一种几何,叫*仿射几何*.在讨论仿射几何时,我们强调它与射影几何的联系,以及如何用射影几何的知识帮助解决仿射几何问题.自然,仿射几何也可以脱离射影几何,单独研究讨论.

定义 4.1.1 取定射影平面 P^2 上的一条直线，记为 α_∞，在 P^2 上去掉直线 α_∞ 以及 α_∞ 上所有点以后称为仿射平面．不在 α_∞ 上的点称为仿射平面上的点；P^2 上的直线去掉与 α_∞ 的交点以后称为仿射直线，仿射直线也常简称为直线，仿射平面记为 A^2．

仿射平面的一个等价的说法是：在射影平面上把一条直线特殊化，其上的点叫做无穷远点，此直线称作无穷远直线，或绝对直线，记为 α_∞．在运用射影几何来解决仿射几何的问题时，这种看法常常很有用．

射影直线 ξ 上去掉它与无穷远直线的交点 $P_\infty = \xi \times \alpha_\infty$ 以后成为仿射平面上的直线，此直线也记为 ξ，P_∞ 叫直线 ξ 上的无穷远点．仿射直线不再是封闭的，一点可以把仿射直线分成不连通的两部分．直线 ξ 上两点 A, B 把仿射直线分成不连通的三部分，直线 ξ 上的无穷远点可把其中两部分连接起来，称 A, B 之间由不与无穷远点连接的那部分为连接 A, B 的线段，也记为 AB．

定义 4.1.2 在仿射平面上不相交的直线称为平行线．

此定义也可改成：仿射平面上交于无穷远点的直线叫平行线．如果 ξ 与 η 平行，记为 $\xi /\!/ \eta$．显然，仿射平面上直线的平行性有传递性，如果 $\xi /\!/ \eta, \eta /\!/ \zeta$，则 $\xi /\!/ \zeta$．一组互相平行的直线交于同一个无穷远点．

有了平行的概念就可以定义仿射平面上的梯形，平行四边形等图形．设 $ABCD$ 是仿射平面上的四边形，如果四点的顺序连线所得线段 AB, BC, CD, DA 在线段内部不相交，且 $AB /\!/ CD$，则称 $ABCD$ 是梯形．进一步，如果 $AB /\!/ CD, AD /\!/ BC$，则 $ABCD$ 是平行四边形．图 4－1－1 是平行四边形的两种画法，图 4－1－1(b)画出了无穷远直线．

定义 4.1.3 设 B, C, D 是仿射平面上共线三点．P_∞ 是该直线上的无穷远点，称 $A(BCD) = R(BC, DP_\infty)$ 是三点 B, C, D 的单比．

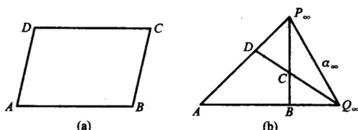


图 4－1－1

性质 4.1.1 仿射平面上共线四点的交比可以用单比表示，设 B,C,D,E 是共线四点，则

$$R(BC,DE)=\frac{A(BCD)}{A(BCE)}.$$

证 设 P_∞ 是 B,C,D,E 所在直线上的无穷远点，则有

$$\begin{aligned}R(BC,DE)&=R(BC,DP_\infty)R(BC,P_\infty E)\\&=\frac{R(BC,DP_\infty)}{R(BC,EP_\infty)}=\frac{A(BCD)}{A(BCE)}.\end{aligned}$$

在射影平面上取射影坐标系 $\{P_1,P_2,P_3;E\}$，使得 P_1,P_2 在无穷远直线 α_∞ 上．从 $P_1(1,0,0)$，$P_2(0,1,0)$ 知道，α_∞ 的方程是 $x_3=0$．对于仿射平面上任一点 $P(x_1,x_2,x_3)$，都有 $x_3\neq 0$，令 $x=\frac{x_1}{x_3}$，$y=\frac{x_2}{x_3}$，称 (x,y) 是点 P 的仿射坐标．

如图 4－1－2(a)，记 $E_1=P_2E\times P_1P_3$，$E_2=P_1E\times P_2P_3$，易知 $E_1(1,0,1)$，$E_2(0,1,1)$．对于任一点 P，记 $P_x=P_1P_3\times PP_2$，$P_y=P_2P_3\times PP_1$．如果 P 坐标是 (x_1,x_2,x_3)，那么 $P_x(x_1,0,x_3)$，$P_y(0,x_2,x_3)$．通过简单计算可知，这些点的仿射坐标分别是

$$P_3(0,0),E_1(1,0),E_2(0,1),P(x,y),P_x(x,0),P_y(0,y).$$

图 4－1－2(b)是图 4－1－2(a)的另一种画法，P_1,P_2 是无穷远点，它们不再画出，交点在无穷远直线上的直线按照习惯画成了

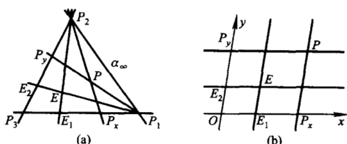


图 4-1-2

平行线. $O=P_3$ 是坐标原点, $OP_1=P_3P_1$ 叫 x 轴, $OP_2=P_3P_2$ 叫 y 轴, $E_1(1,0)$, $E_2(0,1)$ 分别是 x 轴与 y 轴上的单位点. 图 4-1-2中坐标系叫仿射坐标系, 易知,

$$x=\frac{x_1}{x_3}=A(P_xE_1O)=R(P_xE_1,P_3P_1),$$

$$y=\frac{x_2}{x_3}=A(P_yE_2O)=R(P_yE_2,P_3P_2).$$

仿射平面上不共线的三点就可以确定一个仿射坐标系, 其中一点为坐标原点, 另外两点分别作为 x 轴与 y 轴上的单位点. 仿射平面上点的仿射坐标可以如上面两式那样利用单比确定. 所以仿射平面上有许多仿射坐标系, 同一点在不同的仿射坐标系下可以有不同的仿射坐标.

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 是仿射平面上两点, 它们的齐次坐标是 $(x_1,y_1,1)$, $(x_2,y_2,1)$, $a-b=(x_1-x_2,y_1-y_2,0)$ 是直线 AB 上的无穷远点的坐标. 直线 AB 的方程是

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

它也可表示为$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \end{vmatrix}=0$,所以直线 AB 的方程也可以写成

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

或表示为 x,y 的一次方程

$$ax+by+c=0,\quad a,b\text{ 不全为 }0.$$

从仿射平面上两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$可得向量

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1\}.$$

如果 $C(x_3,y_3)$与 A,B 共线,则$\overrightarrow{AC}=\{x_3-x_1,y_3-y_1\}$与$\overrightarrow{BC}=\{x_3-x_2,y_3-y_2\}$共线.记

$$\frac{AC}{BC}=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}=\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2},$$

它可看成有向线段之比.也就是说,如果 $\lambda\overrightarrow{AC}=\mu\overrightarrow{BC}$,则$\frac{AC}{BC}=\frac{\mu}{\lambda}$,由定义显然有$\frac{AC}{BC}=-\frac{CA}{BC}$.对于共线四点 P,Q,R,S 或平行的向量$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{GH}$,也可以定义$\frac{PQ}{RS}$与$\frac{EF}{GH}$.

性质 4.1.2 设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),R(x_3,y_3)$是共线三点,则

$$A(PQR)=\frac{PR}{QR}=\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}.$$

证 设 P_∞是直线 PQ 上无穷远点,由 P,Q,R 的齐次坐标可得

$$p_\infty=p-q,\ r=\lambda p+\mu q,$$

$A(PQR)=R(PQ,RP_\infty)=-\frac{\mu}{\lambda}$.从 $r=\lambda p+\mu q$ 可得$\lambda+\mu=1$,

因此 $r-p=\mu(q-p), r-q=\lambda(p-q)$，即

$$\{x_3-x_1, y_3-y_1\}=\mu\{x_2-x_1, y_2-y_1\},$$

$$\{x_3-x_2, y_3-y_2\}=-\lambda\{x_2-x_1, y_2-y_1\}.$$

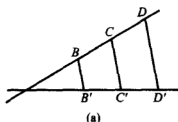
因此

$$A(PQR)=-\frac{\mu}{\lambda}=\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}=\frac{PR}{QR}.$$

从性质 4.1.1 可知，仿射平面上交比也可以用有向线段之比表示

$$R(BC,DE)=\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{BE}.$$

性质 4.1.3 设 $B,C,D;B',C',D'$ 分别是共线三点，如果 BB',CC',DD' 互相平行，则 $A(BCD)=A(B'C'D')$，即 $\frac{BD}{CD}=\frac{B'D'}{C'D'}$，如图 4-1-3(a).



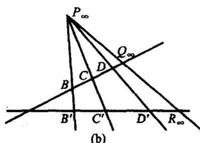


图 4-1-3

证 如图 4-1-3(b)，设平行直线 BB',CC',DD' 的交点是 P_∞，BC 与 $B'C'$ 上无穷远点分别是 Q_∞, R_∞. 于是以 P_∞ 为中心的直线 BC 与 $B'C'$ 之间的透视分别把 B,C,D,Q_∞ 分别变为 B',C',D',R_∞. 因此

$$R(BC,DQ_\infty)=R(B'C',D'R_\infty)，即 A(BCD)=A(B'C'D').$$

此性质的条件并不充分，由 $A(BCD)=A(B'C'D')$ 并不能得

出 $BB' /\!/ CC' /\!/ DD'$.

例 1 设直线 ξ 与 η 交于 B，而 $C, D; C', D'$ 分别是 ξ 与 η 上另外两点，则 $CC' /\!/ DD'$ 的充要条件是 $A(BCD) = A(BC'D')$.

证 记 $Q_\infty = \xi \times \alpha_\infty$，$R_\infty = \eta \times \alpha_\infty$，必要性证明类似性质 4.1.3. 反之. 由 $A(BCD) = A(BC'D')$ 也可得 $R(BC, DQ_\infty) = R(BC', D'R_\infty)$. 所以存在透视

$$\xi(B, C, D, Q_\infty, \cdots) \barwedge \eta(B, C', D', R_\infty, \cdots),$$

因此 $CC', DD', Q_\infty R_\infty = \alpha_\infty$ 交于一点，即 $CC' /\!/ DD'$.

定义 4.1.4 如果 $A(BCD) = -1$，则 D 叫做 B, C 的仿射中点，或称为线段 BC 的中点.

设 P_∞ 是直线 BC 上无穷远点，则 D 是 BC 的中点的充要条件是 D 是 B, C, P_∞ 的第四调和点. 如果 $B(x_1, y_1)$，$C(x_2, y_2)$，则 $P_\infty(x_1 - x_2, y_1 - y_2, 0)$，不难求得 BC 的中点是 $b + c = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2)$，即 $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$. 要注意的是，这里中点的定义以及性质 4.1.2 中有向线段比 $A(PQR) = \dfrac{PR}{QR}$ 并没有用距离，仿射平面上两点的距离还没有定义.

例 2 如图 4-1-4，设 D, E, F 是三角形 ABC 的三边上的点，$DE /\!/ AB$，$FD /\!/ AC$，$EF /\!/ BC$，则 D, E, F 分别是线段 BC, CA, AB 的仿射中心.

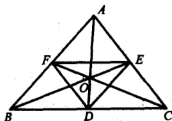


图 4-1-4

证 由于 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的对应边平行，因此对应边的交点在无穷远直线上. 由 Desargues 定理，AD，BE，CF 交于一点 O. 设 P_∞ 是 BC 上的无穷远点，由调和点列的作法，$R(BC, DP_\infty) = -1$，即 D 是 BC 的中点. 同理，F, E 分别是 AB 与 AC 的中点.

AD,BE,CF 都叫做$\triangle ABC$ 的中线,这证明了仿射平面上三角形的中线交于一点,中位线平行于底边.

仿射平面上有许多仿射坐标系,它们决定的无穷远直线的方程都是 $x_3=0$.设(x,y)与(x',y')是两仿射坐标系决定的仿射坐标,类似§2.3 例 2 与§2.4 的讨论可知,坐标(x,y)与(x',y')之间的坐标变换形如:

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+b_1, \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+b_2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

仿射平面上不共线的三点就可以确定一个仿射坐标系.适当选取仿射坐标常可以简化仿射几何问题的讨论与证明.

4.1.2 仿射变换

设 $\varphi:P^2\to P^2$ 是平面上使无穷远直线不变的直射变换,则 φ 把无穷远点变为无穷远点,把仿射平面上点变为仿射平面的点,仿射平面上的直线变为直线,φ 决定仿射平面上的一个变换.

定义 4.1.5 使无穷远直线不变的直射变换叫做仿射平面上的*仿射变换*.

下面的定理显然成立.

定理 4.1.4 仿射平面上所有的仿射变换构成群,叫*仿射变换群*,它是直射变换群的子群.

平面仿射几何就是要研究仿射平面上那些在任意仿射变换下不变的性质,称为*仿射性质*.由仿射平面及仿射变换的定义,仿射平面上的点与直线的结合关系是仿射性质.由于仿射变换保持交比并把无穷远点变为无穷远点,下面的性质是显然的.

性质 4.1.5 平行性是仿射性质,单比是仿射不变量.

因此梯形,平行四边形,平行四边形的对角线交点是对角线的中点,三角形的中线交于一点等性质都是仿射性质.

由于仿射变换是直射的特例,因此射影性质经过适当的解释可以成为仿射性质.例如,Desargues 定理,Pappus 定理等经过适当

的解释得到仿射平面上的相应定理. 下面定理中的几种情况都是 Desargues 定理的仿射几何特例.

定理 4.1.6 如果仿射平面上两个三角形的对应顶点的连线交于一点或者互相平行，那么下列情况之一成立：

(ⅰ) 两三角形的对应边交点共线；

(ⅱ) 三角形的两对对应边交点的连线平行于第三对对应边；

(ⅲ) 三角形的三对对边分别平行.

证 由 Desargues 定理，此两三角形的对应边交点共线，以上三种情况分别对应于：(ⅰ)三对对应边交点都是普通点；(ⅱ)有两点是普通点，一个是无穷远点；(ⅲ)三个都是无穷远点.

性质 4.1.7 仿射变换由不共线的三对对应点确定，它在仿射坐标下表示为：

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

证明与第二章 §2.4 中仿射变换公式的证明一样，故略去. 仿射变换由仿射平面上不共线的三对对应点唯一确定. 性质 4.1.7 中仿射变换与 §2.4 中仿射变换的区别仅在于：§2.4 中公式里的坐标 (x, y) 是欧氏坐标，而性质 4.1.7 中坐标 (x, y) 是一般的仿射坐标.

例 3 从 §2.3 例 3 知道，如果直射 φ 使 $\alpha_\infty : x_3 = 0$ 上每一点不动，则 φ 在齐次坐标下是

$$\rho \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad a_{11}a_{33} \neq 0.$$

这样的直射决定的仿射变换是

$$\varphi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \lambda = \frac{a_{11}}{a_{33}}, b_1 = \frac{a_{13}}{a_{33}}, \ b_2 = \frac{a_{23}}{a_{33}}.$$

(1) 如果 $b_1 = b_2 = 0$，坐标原点 O 是它的不动点. φ 是以 $\alpha_\infty : x_3 = 0$ 为轴，O 为中心的同调变换. 容易知道，如果 A, B 是仿射

平面上任意两点，则 $O,A,A'=\varphi(A)$；$O,B,B'=\varphi(B)$共线，且单比 $A(OAA')=A(OBB')=\lambda$. 进一步有 AB 平行于 $A'B'$，$\frac{A'B'}{AB}=\lambda$. 对于仿射平面上任意三角形 ABC，它的像 $A'B'C'$是它的相似三角形. 这样的变换叫做仿射平面上的一个位似变换. 图4－1－5是 $\lambda>1$ 的情形.

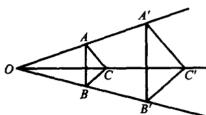


图 4－1－5

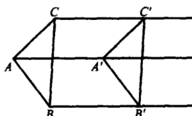


图 4－1－6

(2) 如果 $\lambda=1$，b_1，b_2 不全为 0，则 φ 叫做仿射平面上的一个平移. 容易验证，过无穷远点$(b_1,b_2,0)$的所有直线

$$b_2x-b_1y+c=0,\ c \text{ 是任意常数},$$

在平移下都是不变的. 对于仿射平面上任一点 $A(x,y)$，它的像 $\varphi(A)=A'(x',y')$，则

$$\overrightarrow{AA'}=\{x'-x,y'-y\}=\{b_1,b_2\}.$$

这样的映射在§2.3 例 4 中叫做扩张(图 4－1－6).

设 M 与 M'是仿射平面上的两个图形，如果存在仿射变换使 M 变为 M'，则称 M 与 M'是仿射平面上的全等图形.

由于仿射平面上不共线的三对对应点唯一确定一个仿射变换，仿射平面上任意两个三角形全等. 利用这一性质可证明任意两个平行四边形全等，任意一对平行线全等. 证明留作练习.

习题 4.1

1. 设 $B(1,0)$，$C(0,2)$，$D(2,-2)$是仿射平面上三点

(1) 证明 B,C,D 共线,写出所在直线的方程;

(2) 计算 $A(BCD),A(DBC)$;

(3) 求点 P,使 $A(CDP)=3$.

2. 证明平行四边形的两对角线的交点是对角线的仿射中点.

3. 证明梯形的中位线平行于底边.

4. 是否存在仿射平面上仿射变换,把下列两组三点中 A,B,C 分别变为 A',B',C':

(1) $A(1,2),B(3,4),C(-2,-4);A'(-1,-1),B'(0,0),C'(2,2)$;

(2) $A(-1,1),B(1,0),C(0,\frac{1}{2});A'(1,1),B'(-1,0),C'(0,\frac{1}{2})$.

5. 给定仿射平面上三点,$A(1,0),B(0,1),C(1,1)$,求仿射变换 φ,使得 $\varphi(A)=B,\varphi(B)=C,\varphi(C)=A$,并求 φ 的不动点.

6. 仿射平面上四边形 $ABCD$ 的边 AD 与 BC 上各有动点 E,F,满足$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$. 试证,点 $P=AF\times BE$ 的轨迹是一直线.

§4.2 二次曲线的仿射理论

4.2.1 仿射二次曲线

设 Γ 是射影平面上二次曲线:$\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=0,|a_{ij}|\neq0$. 除非特别申明,下面总假设 Γ 是有实轨迹且非退化的二次曲线,这时对称矩阵 $A=(a_{ij})$非退化但不是正定或负定的. Γ 与仿射平面上的无穷远直线 $\alpha_\infty:x_3=0$ 的交点数是 0,1 或 2. 在仿射坐标下,Γ 的方程成为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

它是仿射平面上的二次曲线. 按照 Γ 与无穷远直线的交点情况,给出仿射二次曲线的定义.

定义 4.2.1 如果二次曲线与无穷远直线不相交,则称它是

仿射平面上的椭圆；如果交于一点，称它是抛物线；如果交于两点，称它是双曲线.

由于仿射变换把无穷远直线变成无穷远直线，因此这样的分类是有意义的. 也就是说，在任意仿射变换下，椭圆变成椭圆，而不会把椭圆变成双曲线或抛物线.

二次曲线 $\Gamma:\sum a_{ij}x_ix_j=0$ 与无穷远直线 α_∞ 的交点由下列方程组决定

$$\begin{cases}a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=0,\\ x_3=0,\end{cases}$$

其判别式是

$$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}.$$

性质 4.2.1 设 $\Gamma:\sum a_{ij}x_ix_j=0$ 是非退化有实轨迹的二次曲线，则

（i）Γ 是椭圆的充要条件是 $\Delta<0$；

（ii）Γ 是抛物线的充要条件是 $\Delta=0$；

（iii）Γ 是双曲线的充要条件是 $\Delta>0$.

如图 4－2－1，椭圆与无穷远直线没有实交点；对于抛物线来说，无穷远直线是它的切线，切点是抛物线上的无穷远点；双曲线与无穷远直线交于两个实点.

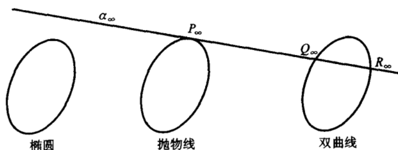


图 4－2－1

如果 Γ 是椭圆或者双曲线，α_∞ 不是自共轭直线，取 Γ 的自极

三点形作为坐标三点形，使无穷远直线是自极三点形的一边，方程仍是 $x_3=0$，这时 Γ 的方程可以简化成(见§3.2)

$$b_1x_1^2+b_2x_2^2+b_3x_3^2=0,\ b_1b_2b_3\neq0,b_1,b_2,b_3\text{ 不同号}.$$

在 $\Delta=-b_1b_2<0$ 时 Γ 是椭圆；在 $\Delta=-b_1b_2>0$ 时 Γ 是双曲线. 于是可适当的选取仿射坐标系，使双曲线或椭圆分别表示为：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

再利用仿射坐标变换 $\begin{cases}x'=\dfrac{x}{a},\\ y'=\dfrac{y}{b},\end{cases}$ 它们分别化简为

$$x'^2-y'^2=1,\ x'^2+y'^2=1.$$

如果 Γ 是抛物线，a_∞ 是它的切线，取 Γ 的另一切线及过两切点的直线为坐标三线形，方程可化简为(参看§3.1)

$$x_2^2-kx_1x_3=0,\ k\neq0.$$

仿射坐标下成为 $y^2=kx$. 进一步可以化成 $y^2=2x$.

性质 4.2.2 适当选择仿射平面上坐标系，非退化且有实轨迹的仿射平面上的二次曲线可以化简成下列形式之一：

(ⅰ) $x^2+y^2=1$； (ⅱ) $x^2-y^2=1$； (ⅲ) $y^2=2x$.

它们分别是椭圆，双曲线，抛物线.

利用仿射变换与仿射坐标变换的关系，不难知道，这也可以看作非退化有实轨迹的仿射二次曲线的分类. 对于两条仿射平面上

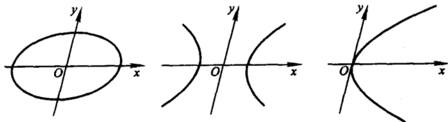


图 4-2-2

的二次曲线,如果存在仿射变换把一条变成另一条,我们称这两条二次曲线在仿射平面上是全等的.性质 4.2.2 告诉我们,如果 Γ_1 与 Γ_2 是仿射平面上的两个椭圆,那么分别存在仿射坐标 (x,y) 与 (x',y') 使得 Γ_1 与 Γ_2 的方程分别为

$$\Gamma_1: x^2+y^2=1,\ \Gamma_2: x'^2+y'^2=1.$$

设两仿射坐标 (x,y) 与 (x',y') 之间坐标变换是:

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+b_1, \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+b_2. \end{cases}$$

因此二次曲线 Γ_1 与 Γ_2 在仿射坐标 (x,y) 下的方程分别是

$\Gamma_1: x^2+y^2=1,$

$\Gamma_2: (a_{11}x+a_{12}y+b_1)^2+(a_{21}x+a_{22}y+b_2)^2=1.$

取仿射变换 φ,

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+b_1, \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+b_2. \end{cases}$$

在仿射变换 φ 下,二次曲线 Γ_2 成为 Γ_1

类似地可以证明抛物线,双曲线的情况,这证明了

定理 4.2.3 仿射平面上任意两个椭圆全等,任意两条双曲线或抛物线也分别全等.

4.2.2 仿射二次曲线的中心,直径与渐近线

定义 4.2.2 无穷远直线关于二次曲线的极点叫二次曲线的*中心*.

对于椭圆与双曲线,α_∞ 都不是自共轭直线,它的极点不在二次曲线上,也不在 α_∞ 上,椭圆或者双曲线的中心在仿射平面上.而对于抛物线,α_∞ 的极点是抛物线上的无穷远点,抛物线的中心不是仿射平面上的点.因此也称抛物线是*无心曲线*,称椭圆与双曲线是*中心二次曲线*.二次曲线上任意两点决定的线段叫二次曲线的*弦*,称此线段的中点是弦的中点.中心的几何性质由下面性质给出.

性质 4.2.4 过中心的二次曲线的弦以中心为中点.

证 设 AB 是二次曲线的过中心 C 的弦,P_∞ 是直线 AB 上的无穷远点,由于 C 是 α_∞ 的极点,C 与 P_∞ 共轭,

$$R(AB,CP_\infty)=-1,$$

即 $A(ABC)=-1$,因此 C 是弦 AB 的中点.图 4-2-3 是椭圆的情况.

二次曲线 $\Gamma:\sum a_{ij}x_ix_j=0$ 的中心满足:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0,\\ a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3=\rho,\end{cases}\quad \rho\neq 0.$$

仿射坐标下,中心 $C(x,y)$ 是下列方程的解:

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0,\\ a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0.\end{cases}$$

求中心的这一公式与解析几何中的公式是一致的.

不难算得,双曲线在标准方程 $x^2-y^2=1$ 下的中心是原点;椭圆在方程 $x^2+y^2=1$ 下中心也是原点.

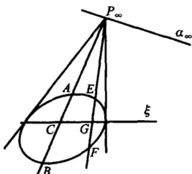


图 4-2-3

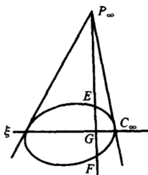


图 4-2-4

性质 4.2.5 二次曲线的平行弦的中点轨迹在一直线上.

证 如图 4-2-3 或 4-2-4,设二次曲线的一组平行弦过点 $P_\infty\in\alpha_\infty$,EF 是其中任意一条平行弦,EF 的中点 G 是 P_∞ 的共

轭点，G 在P_∞的极线上.因此与 EF 平行的弦的中点都在P_∞的极线上.图 4－2－4 是抛物线的情形.

如果过无穷远点 P_∞的直线与二次曲线没有实交点，它与二次曲线有一对共轭的虚交点，设为 $S(z_1, z_2)$，$T(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$，它们的中点$\left(\frac{z_1+\bar{z}_1}{2}, \frac{z_2+\bar{z}_2}{2}\right)$是实点，这一点也在 P_∞的极线上.我们把这种点也叫做平行弦的中点，这时 ST 是二次曲线的虚弦.

定义 4.2.3 二次曲线的平行弦的中点轨迹为二次曲线的直径.

由性质 4.2.5 的证明可得：

推论 4.2.6 （ⅰ）中心二次曲线的直径过中心；

（ⅱ）抛物线的直径互相平行.

证 设 ξ 是过P_∞的平行弦的中点轨迹，ξ 是P_∞的极线；由配极原理，无穷远直线的极点也在 ξ 上.对于中心二次曲线，无穷远直线的极点是中心；对于抛物线，无穷远直线的极点是抛物线上无穷远点.这证明了，中心二次曲线的直径过中心；抛物线的直径互相平行.

设 $P_\infty(\lambda, \mu, 0)$ 是一无穷远点，它不在二次曲线 Γ: $\sum a_{ij}x_ix_j=0$上.P_∞的极线是过 P_∞的平行弦的中点的轨迹，是二次曲线的直径.所以二次曲线的直径总可以表示成

$$\lambda(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+\mu(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0.$$

记 $F_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$，$F_2(x,y)=a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0$，则

$$\lambda F_1(x,y)+\mu F_2(x,y)=0,$$

即

$$(\lambda a_{11}+\mu a_{12})x+(\lambda a_{12}+\mu a_{22})y+\lambda a_{13}+\mu a_{23}=0.$$

这一公式与解析几何中的直径公式也是一致的.由假设 P_∞不在二次曲线 Γ 上，$a_{11}\lambda^2+2a_{12}\lambda\mu+a_{22}\mu^2\neq0$，所以 $\lambda a_{11}+\mu a_{12}=0$，

$\lambda a_{12}+\mu a_{22}=0$ 不能同时成立，$\lambda F_1(x,y)+\mu F_2(x,y)=0$ 是仿射平面上的一条直线.

按照解析几何的语言，如果 $a_{11}\lambda^2+2a_{12}\lambda\mu+a_{22}\mu^2=0$，则称 $\lambda:\mu$ 为二次曲线的渐近方向.

定义 4.2.4 二次曲线上无穷远点处的切线称为二次曲线的渐近线.

由定义立即知道，双曲线有两条渐近线；而椭圆没有实的渐近线；抛物线的渐近线是无穷远直线，因此也说抛物线在仿射平面上没有渐近线. 对于双曲线来说，它的中心也是无穷远直线的极点，也是双曲线上无穷远点处的切线的交点. 于是有

性质 4.2.7 双曲线的渐近线交于中心.

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的中心是原点 $O(0,0)$，渐近线是 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ 与 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$. 图 4-2-5 给出了渐近线的两种画法，前一种是将无穷远直线画出的，如果要用射影几何来解决双曲线有关渐近线的问题，常采用这种画法.

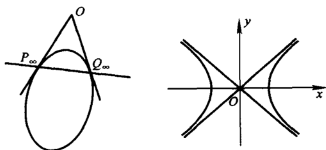


图 4-2-5

设 $P_\infty(\lambda_1,\mu_1,0)$，$Q_\infty(\lambda_2,\mu_2,0)$ 是双曲线 $\Gamma:\sum a_{ij}x_ix_j=0$ 上两个无穷远点，即 λ_i,μ_i 满足

$$a_{11}\lambda^2+2a_{12}\lambda\mu+a_{22}\mu^2=0,$$

$\lambda_1:\mu_1,\lambda_2:\mu_2$ 是双曲线的两个渐近方向．P_∞，Q_∞ 处的切线是双曲线的两条渐近线

$$\lambda_i(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+\mu_i(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0, i=1,2,$$

即

$$\lambda_iF_1(x,y)+\mu_iF_2(x,y)=0.$$

双曲线的渐近线也过中心，但它不是平行弦中点的轨迹．可以证明

性质 4.2.8 仿射二次曲线的过中心的直线除了双曲线的渐近线都是平行弦中点的轨迹．

与前面一样，在此性质中，我们把平行直线与二次曲线交的一对共轭虚点的连线的中点也看作是平行弦中点．

定义 4.2.5 关于二次曲线共轭的两条直径叫做一对共轭直径．

性质 4.2.9 （ⅰ）抛物线的直径无共轭直径；

（ⅱ）双曲线或椭圆的一对共轭直径与无穷远直线构成自极三线形．

证 （ⅰ）设 C_∞ 是抛物线上无穷远点，它也是抛物线的中心．如图 4－2－6，设 ξ 是抛物线的一条直径，P_∞ 是 ξ 的极点．如果 η 是 ξ 的共轭直径，则 η 过 C_∞ 与 ξ 的极点 P_∞，因此 $\eta=\alpha_\infty$．但无穷远直线不是仿射平面上直线，ξ 没有共轭直径．

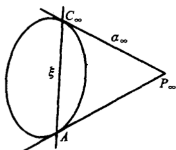


图 4－2－6

（ⅱ）设 ξ,η 是一对共轭直径，它们的交点是中心 C；ξ,η,α_∞ 关于二次曲线两两共轭，构成自极三线形．图 4－2－7 是椭圆的情形．

推论 4.2.10 双曲线或椭圆的平行于一直径的弦的中点在它的共轭直径上．

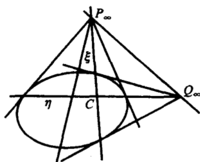


图 4-2-7

证 如图 4-2-7,设 ξ 是一直径,则平行于 ξ 的弦的中点在 P_∞ 的极线 η 上,η 也是 ξ 的共轭直径.所以平行于直径 ξ 的弦的中点在它的共轭直径 η 上.同理,平行于 η 的弦的中点在 ξ 上.

如果 ξ 是双曲线或椭圆的一直径,P_∞ 是其上的无穷远点,P_∞ 的极线就是 ξ 的共轭直径.

上面用射影几何的观点定义并讨论了二次曲线的中心,直径,共轭直径,渐近线等解析几何中已经讨论的概念.这些概念在解析几何里都曾给出过计算公式,作为练习,读者可以把从射影定义出发得到的公式与解析几何的相应公式作一比较.

例 1 设二次曲线 $\Gamma: xy+x+y=0$,判断它的类型.

(1) 求过点 $P(0,1)$ 的直径与共轭直径;(2) 如果 Γ 是双曲线求它的渐近线.

解 改写 Γ 的方程为齐次坐标方程:$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0$,其矩阵 A 非退化,且显然有实轨迹(过原点).Γ 与无穷远直线交于两点 $P_\infty(1,0,0)$,$Q_\infty(0,1,0)$,它是双曲线.P_∞,Q_∞ 处的切线就是 Γ 的渐近线

$$(1,0,0)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,\ (0,1,0)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0.$$

仿射坐标下是 $y+1=0$ 与 $x+1=0$. 它们的交点 $C(-1,-1)$就是双曲线的中心.

过点 P 与中心 C 的直线 $2x_1-x_2+x_3=0$，即 $2x-y+1=0$ 就是过 P 的直径，此直径上的无穷远点 $P_\infty(1,2,0)$的极线就是直径 CP 的共轭直径，

$$2x_1+x_2+3x_3=0, \text{即 } 2x+y+3=0.$$

以上讨论了非退化且有实轨迹的二次曲线，如果把由下式

$$\Gamma: a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

a_{11}, a_{12}, a_{22}不全为 0，定义的仿射平面上轨迹叫做二次曲线. 根据它与无穷远直线交点情况也可给出分类，仍记 $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$，则

(i) $\Delta>0$，Γ 叫双曲型曲线；

(ii) $\Delta=0$，Γ 叫抛物型曲线；

(iii) $\Delta<0$，Γ 叫椭圆型曲线.

这样定义的二次曲线的分类由下定理给出.

定理 4.2.11 仿射平面上二次曲线在适当的仿射坐标下总可以化简成下列形式之一：

(i) $x^2+y^2=1$；　　(ii) $x^2-y^2=1$；

(iii) $y^2=2x$；　　(iv) $x^2+y^2+1=0$；

(v) $x^2+y^2=0$；　　(vi) $x^2-y^2=0$；

(vii) $y^2=1$；　　(viii) $y^2+1=0$；

(ix) $y^2=0$；

证 上面情况(i)—(iv)都是非退化情况，其中(i)，(ii)，(iii)在性质 4.2.2 中已证明. 情形(iv)是非退化但无实轨迹的情形，它也可采用自极三点形(以 a_∞ 为一边)来简化. 因此只要考虑退化情形.

设 $\Gamma: a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ 是退化二次曲线，它的矩阵 $A=(a_{ij})$退化，矩阵 A 的秩是 1 或 2. Γ 的齐次方程是$\sum a_{ij}x_ix_j=0$.

(1) 矩阵 A 的秩是 2,这时 Γ 上有唯一的奇点,设为 P,如果 P 是仿射平面上点,可以取 P 为仿射坐标的原点.由 $P(0,0)$是奇点可得 $a_{13}=a_{23}=a_{33}=0$,Γ 方程成为 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$.取非退化矩阵 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$,使 $B^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}B$ 成为对角阵 $\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$.通过仿射坐标变换$\begin{cases} x=b_{11}x'+b_{12}y', \\ y=b_{21}x'+b_{22}y', \end{cases}$则可使 Γ 方程成为

$$b_1x'^2+b_2y'^2=0.$$

由于矩阵 A 的秩是 2,$b_1b_2\neq 0$.对 b_1,b_2 的符号进行讨论,进一步化简可得定理中(ⅴ),(ⅵ)两种情况.

(2) 矩阵 A 的秩是 2,但 Γ 的奇点在无穷远直线上,取仿射坐标系使此奇点是 x 轴上无穷远点$(1,0,0)$,这时可得

$$a_{11}=a_{12}=a_{13}=0,$$

Γ 成为 $a_{22}y^2+2a_{23}y+a_{33}=0$,且$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$.进一步化简可得情形(ⅶ)与(ⅷ).

(3) 矩阵 A 的秩是 1,奇点构成直线.如果奇点构成无穷远直线,则类似上面证法可得 $a_{11}=a_{12}=a_{22}=a_{13}=a_{23}=0$,与 Γ 为仿射二次曲线矛盾.因此 Γ 的奇点是仿射平面上直线.取它为 x 轴,则 $P(x_1,0,x_3)$都是奇点,这时除 a_{22}外其余均为 0,所以 Γ 方程是$a_{22}y^2=0$,即 $y^2=0$,此即情形(ⅸ).

习题 4.2

1. 确定以下仿射二次曲线的类型,如果是双曲线,求出它们的中心与渐近线:

(1) $8x^2+4xy+5y^2+8x-16y-16=0$;

(2) $x^2-4xy-2y^2+10x+4y=0$;

(3) $3x^2+2y^2-2x+y-1=0$;

(4) $4x^2-4xy+y^2+4x-2y=0$.

2. 证明:抛物线的任两切线不平行;而双曲线或椭圆上任一切线存在另一条与之平行的切线,此两平行切线的切点连线是二次曲线的直径.

3. 双曲线的任一对共轭直径与渐近线互相调和分割.

4. 如果内接于二次曲线的六边形有两对对边互相平行,则第三对对边也平行.

5. 设 A,B,C,D,E 是二次曲线上五点,如果 $BC /\!/ DE, AD /\!/ CE$,则 E 处切线平行于 AB.

6. 试证,如果过点 C 有二次曲线的两条弦以它为中点,那么 C 是二次曲线的中心.

7. 试证内接于二次曲线的平行四边形的两对对边分别平行于一对共轭直径,它的两条对角线是两条直径.

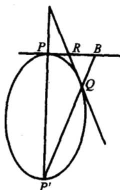
8. 外切于二次曲线的平行四边形的对角线是一对共轭直径,并且四切点连线也构成一个平行四边形.

9. 求仿射平面上过点(0,0),(-1,-2),(0,2),一直径是 $2x+y=3$ 的抛物线.

10. 设 M 是抛物线上弦 AB 的中点,C 是 AB 的极点,证明线段 CM 与抛物线的交点是它的中点.

11. 在三点形 ABC 的 AC,BC 上分别取动点 P,Q,使 $A(PAC)=A(QCB)$.试证明 PQ 构成一条二级曲线,其对应的仿射二次曲线是抛物线.

12. 设 PP' 是有心二次曲线的直径,Q 是二次曲线上另一点,P 处切线与 $P'Q$ 交于 B,R 是 P 与 Q 处切线的交点.求证,R 是 PB 的中点.

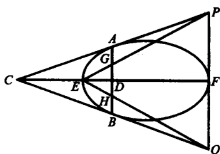


习题 12

13. 设 AC,BC 是二次曲线的切线,切点是 A,B,一条过 C 的直线交二次曲线于 E,F,$D=AB\times EF$.过 F 作 AB 的平行线交 AC,BC 分别于 P,Q,记 $G=AB\times PE$,$H=AB\times QE$.试证,

(1) G 是 AD 的中点,H 是 DB 的中点;

(2) PQ 是二次曲线的切线的充要条件是 D 是 AB 的中点.



习题 13

§4.3 欧氏几何

4.3.1 虚点、虚直线

到现在为止,我们主要在实数范围内讨论问题.为了从射影几何的观点研究欧氏几何,将射影几何的知识运用到欧氏几何,我们要使用复数.如前面已经提到的,坐标是复数的点或直线是射影平面,仿射平面或者欧氏平面上的虚点或虚直线.可以把共线四点与共点四直线的交比等概念推广到其中有虚点或虚直线的情形,计算方法与实的情况类似.也可证明这时§1.5中定理1.5.1,性质1.5.2等仍然成立.

例如,$A(2,\mathrm{i},1)$,$B(4,\mathrm{i},2)$是两虚点,它们决定的直线是$x_1-2x_3=0$.它是实直线,A,B是此直线上的虚点,点$C(2,0,1)$是AB上实点,由

$$c=-a+b,\ d=a+b,\ e=(1+\mathrm{i})a+b$$

决定的点$D(6,2\mathrm{i},3)$是A,B,C的第四调和点,对于点$E(6+2\mathrm{i},-1+2\mathrm{i},3+\mathrm{i})$,交比$R(AB,CE)=-1-\mathrm{i}$,$R(AB,DE)=1+\mathrm{i}$.

如果虚点满足直线或者二次曲线的方程,称它们是直线或二次曲线上的虚点.我们用下面的例子说明 Steiner 定理可以推广到

线束的直线中有虚直线，甚至线束中心就是虚点的情况.

例 1 设 $I(1,\mathrm{i},0)$，$J(1,-\mathrm{i},0)$是无穷远直线上两虚点，过点 I 的直线(除 α_∞ 外)都可以写成 $\xi:\lambda(x_1+\mathrm{i}x_2)+\mu x_3=0$，($\lambda,\mu$ 是不全为零的复数). 将直线 ξ 对应于过点 J 的直线 $\xi':\mu(x_1-\mathrm{i}x_2)-\lambda x_3=0$，记此映射为 φ. 记直线 $x_1+\mathrm{i}x_2=0$ 为 δ，$x_1-\mathrm{i}x_2=0$ 为 δ'. 则直线 ξ 可表示成 $\lambda\delta+\mu\alpha_\infty$，$\xi'$ 可表示成 $\mu\delta'-\lambda\alpha_\infty$，由此可知 φ 是线束 I 到线束 J 的一一的，且保交比的映射，是射影映射. 由于 $\varphi(\alpha_\infty)=\delta'$，$\varphi$ 不是透视，对应直线 ξ 与 ξ' 的交点满足

$$\begin{cases}\lambda(x_1+\mathrm{i}x_2)+\mu x_3=0,\\ \mu(x_1-\mathrm{i}x_2)-\lambda x_3=0,\end{cases}$$

消去参数 μ 得到射影映射 φ 的对应直线交点的轨迹

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0.$$

这是一条没有实轨迹的非退化二次曲线，线束中心 I,J 也在此二次曲线上.

采用例 1 的记号，如果线束 I,J 之间的映射 φ' 的对应为，$\lambda\delta+\mu\alpha_\infty$ 变成 $\mu\delta'+\lambda\alpha_\infty$，那么映射 φ' 决定的轨迹是

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0.$$

这是一条有实轨迹的非退化二次曲线，线束中心 I,J 也在此二次曲线上.

关于二次曲线的极点，极线，切线，共轭等概念也可以推广到虚点，虚直线的情况，所用公式的形式不变. 这些性质的证明只要把原来的证明稍加修改即可.

例 2 采用例 1 中二次曲线 $\Gamma:x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$，它没有实轨迹，仿射坐标下是 $x^2+y^2+1=0$，可以看作一个虚椭圆. 过无穷远直线 α_∞ 上点 $P_\infty(1,0,0)$ 的直线 $x_2+\lambda x_3=0$(λ 是实数)是仿射平面上一组平行线. 此直线与 Γ 交于一对共轭虚点 $A(\mathrm{i}\sqrt{\lambda^2+1},-\lambda,1)$，$B(-\mathrm{i}\sqrt{\lambda^2+1},-\lambda,1)$. 虚线段 AB 的中点是$(0,-\lambda,$

1)，它是实点．因此过 P_∞ 的平行直线与二次曲线 Γ 的交点所成虚弦的中点轨迹是直线 $x=0$，它正是点 $P_\infty(1,0,0)$ 关于 Γ 的极线．无穷远直线关于 Γ 的极点 $O(0,0,1)$ 是 Γ 的中心．显然 $x=0$ 过中心 O．$I(1,\mathrm{i},0)$ 是 Γ 上的虚点，它的极线 $x_1+\mathrm{i}x_2=0$ 与 Γ 交于二重（虚）点，因此 $x_1+\mathrm{i}x_2=0$ 也是 I 处切线．Γ 上另一无穷远虚点 J 处切线是 $x_1-\mathrm{i}x_2=0$．

上面简要地说明了虚点，虚直线的一些有关性质．要注意并不是所有坐标分量为复数的点都是虚点，如 $(3\mathrm{i},5\mathrm{i},6\mathrm{i})$ 与 $(3,5,6)$ 成比例，$(3\mathrm{i},5\mathrm{i},6\mathrm{i})$ 不是虚点．在涉及虚点与虚直线时应该谨慎从事，并不是所有性质，公式都适用于虚点，虚直线．例如，欧氏平面上点的距离，直线之间夹角的原有公式不能应用于虚点，虚直线．再一次说明，虚点、虚直线本身不是射影平面上的点，是为了研究的需要引进的．

4.3.2 欧氏变换与欧氏几何

在§4.1，我们把射影平面上一条直线特殊化，得到仿射平面．特殊直线 α_∞ 上的点不再是仿射平面上的点，使 α_∞ 不变的直射是仿射平面上的仿射变换．取定仿射平面上坐标 (x,y)，(x_1,x_2,x_3) 是对应的齐次坐标．对于平面上任意两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，定义它们的距离

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

这样的距离叫**欧氏距离**，定义了欧氏距离的平面叫**欧氏平面**，(x,y) 叫点的欧氏坐标或直角坐标，欧氏平面记为 E^2．

欧氏平面上两点 P,Q 决定向量 $\overrightarrow{PQ}=\{x_2-x_1,y_2-y_1\}$，如果向量 $\vec{u}=\{u_1,u_2\}$，$\vec{v}=\{v_1,v_2\}$，则由欧氏距离自然地定义了向量 $\vec{u},\vec{v}$ 的内积

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2.$$

向量 $\vec{u},\vec{v}$ 的夹角 $\angle(\vec{u},\vec{v})$ 由下式确定

$\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$, $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$, $|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$.

定义 4.3.1 称无穷远直线上点 $I(1,\mathrm{i},0)$ 与 $J(1,-\mathrm{i},0)$ 是圆点.

对圆点 I 的坐标取复数共轭,就得到 J 的坐标, I,J 是无穷远直线上的一对共轭的虚点.

定义 4.3.2 如果仿射变换 φ 保持圆点不变,即它把圆点变成圆点,称 φ 是欧氏平面上的相似变换.

如果 φ 是仿射变换,则 $\varphi(I)=I$, $\varphi(J)=J$ 或 $\varphi(I)=J$, $\varphi(J)=I$. 下面的性质给出相似变换的表示式.

性质 4.3.1 设 $\varphi:\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ 是欧氏平面上的相似变换,那么存在常数 $\lambda>0$ 及 θ,

(i) 如果 $\varphi(I)=I,\varphi(J)=J$,则 A 可以表示成 $\begin{pmatrix}\lambda\cos\theta&\lambda\sin\theta\\-\lambda\sin\theta&\lambda\cos\theta\end{pmatrix}$;

(ii) 如果 $\varphi(I)=J,\varphi(J)=I$,则 A 可以表示成 $\begin{pmatrix}\lambda\cos\theta&\lambda\sin\theta\\\lambda\sin\theta&-\lambda\cos\theta\end{pmatrix}$.

证 将 φ 表示成

$$\rho\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

(i) 由于 I,J 是一对共轭的虚点,如果 $\varphi(I)=I$,则 $\varphi(J)=J$,只要考虑 $\varphi(I)=I$. 这时有非零复数 z 使得:

$$\begin{cases}a_{11}+\mathrm{i}a_{12}=z,\\a_{21}+\mathrm{i}a_{22}=\mathrm{i}z,\end{cases}$$

于是 $a_{11}=a_{22}=\mathrm{Re}\,z$, $a_{12}=-a_{21}=\mathrm{Im}\,z$,($\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Im}\,z$ 分别是 z 的实部与虚部). 记 $|z|=\lambda$, $z=\lambda\cos\theta+\mathrm{i}\lambda\sin\theta$, 则有 $A=\begin{pmatrix}\lambda\cos\theta&\lambda\sin\theta\\-\lambda\sin\theta&\lambda\cos\theta\end{pmatrix}$.

(ⅱ) 从 $\varphi(I)=J$ 也可得 $\varphi(J)=I$. 假设 $\varphi(I)=J$,则有

$$\begin{cases} a_{11}+\mathrm{i}a_{12}=z, \\ a_{21}+\mathrm{i}a_{22}=-\mathrm{i}z. \end{cases}$$

类似可得 $A=\begin{pmatrix} \lambda\cos\theta & \lambda\sin\theta \\ \lambda\sin\theta & -\lambda\cos\theta \end{pmatrix}$.

另一方面,容易证明系数矩阵是 $\begin{pmatrix} \lambda\cos\theta & \lambda\sin\theta \\ -\lambda\sin\theta & \lambda\cos\theta \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} \lambda\cos\theta & \lambda\sin\theta \\ \lambda\sin\theta & -\lambda\cos\theta \end{pmatrix}$ 的仿射变换一定保持圆点不变,是欧氏平面上的相似变换.

性质 4.3.1 中仿射变换的系数矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}\cdot A=\lambda^2 I$;且在(ⅰ)时,$|A|=\lambda^2$,在(ⅱ)时,$|A|=-\lambda^2$. λ 叫相似变换 φ 的相似比.

定理 4.3.2 (1) 欧氏平面上所有的相似变换构成群,叫相似变换群,它是仿射变换群的子群;

(2) 如果相似变换 φ 的相似比是 λ,则对欧氏平面上任意两点 P,Q,它们的像 $P'=\varphi(P),Q'=\varphi(Q)$,都有

$$\frac{|P'Q'|}{|PQ|}=\lambda.$$

证 性质 4.3.1 中 φ 表示式可以统一表示成

$$\varphi:\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

它的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 满足 $A^{\mathrm{T}}\cdot A=\lambda^2 I$. 对于平面上任意两点 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,它们的像 $P'(x_1',y_1'),Q'(x_2',y_2')$. 利用

$$\begin{pmatrix} x_1'-x_2' \\ y_1'-y_2' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ y_1-y_2 \end{pmatrix},$$

$$|PQ|^2=(x_1-x_2,y_1-y_2)\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix},$$

得

$$|P'Q'|^2=(x_1-x_2,y_1-y_2)A^{\mathrm{T}}\cdot A(x_1-x_2,y_1-y_2)^{\mathrm{T}}=\lambda^2|PQ|^2.$$

定理 4.3.2 的几何意义是，相似变换把欧氏平面上任意一个三角形变成它的相似三角形；把欧氏平面上一个图形变成它的相似图形. 这也说明，相似变换保持欧氏平面上任意两直线的夹角. 可以证明，如果欧氏平面上的变换使$\dfrac{|P'Q'|}{|PQ|}=\lambda$对任意两点 P,Q 总成立，此变换为相似变换.

定义 4.3.3 如果相似变换 φ 的相似比 $\lambda=1$，这时 φ 的系数矩阵 A 是**正交矩阵**，即 $A^{\mathrm{T}}\cdot A=I$，称 φ 是欧氏平面上的**欧氏变换**.

不难证明，对任一个二阶正交矩阵 A 总有实数 θ，使 A 可以表示为

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

由欧氏变换的定义，下面的定理成立. 它也可利用正交矩阵与正交矩阵相乘仍是正交矩阵来证明.

定理 4.3.3 欧氏平面上所有的欧氏变换构成群，叫**欧氏变换群**，它是仿射变换群的子群，也是相似变换群的子群.

按照定义，欧氏平面上的仿射变换群，相似变换群，欧氏变换群的关系是

仿射变换群⊃相似变换群⊃欧氏变换群.

在§2.1 里曾讨论过一些欧氏变换，如旋转，平移，反射等，对于旋转或平移，变换矩阵 A 的行列式等于 1；而对于反射，A 的行列式等于 -1. 有趣的是关于直线的反射可以生成一切欧氏变换. 例如，关于两条相交直线的连续两次反射的结果是旋转，旋转中心是两直线的交点；关于两条平行直线的连续两次反射的结果是平移. 而相似变换总可表示为形如

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

的位似变换与一个欧氏变换的合成.

欧氏平面上在任意欧氏变换下不变的性质叫欧氏性质,相应的几何叫欧氏几何.由定理 4.3.2(这时 $\lambda=1$),两点之间的距离,两直线的夹角都是欧氏性质.欧氏平面上可以由距离和夹角表示的性质都是欧氏性质.三角形的高,中线,角平分线,正弦定理,余弦定理等中学平面几何讨论的内容都是欧氏几何内容.下面的定理进一步说明距离是欧氏平面的基本不变量.

定理 4.3.4 欧氏平面上的映射是欧氏变换的充要条件是它保持任意两点之间的距离.

证 由定理 4.3.2,欧氏变换保持任意两点之间的距离,只要证明充分性.设映射 φ 保持点的距离,易知 φ 是单射.如果 A,B,C 是不共线的三点,$A'=\varphi(A)$,$B'=\varphi(B)$,$C'=\varphi(C)$是它们的像.由于 φ 是等距,$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是全等的,A',B',C'不共线.这也证明了如果 A,B,C 共线,那么 A',B',C'也共线.因此 φ 把直线变成直线,并且保持直线之间的夹角.φ 把直角坐标系 $O-xy$ 变成直角坐标系 $O'-x'y'$,其中 x'轴与 y'轴分别是 x 轴与 y 轴在映射 φ 下的像,($O'-x'y'$可能是左手系的).如果 $P(x,y)$是欧氏平面上任一点,它在 φ 下像是$P'(x',y')$,由于 φ 是等距,P'在坐标系 $O'-x'y'$下坐标也是(x,y).利用直角坐标变换公式可知映射 φ 的表示式为:

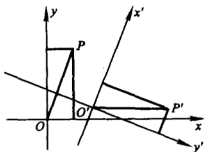


图 4-3-1

$$\varphi:\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

其中 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 是正交矩阵，φ 是欧氏变换.

在§1.5我们已经证明了，欧氏平面上共线点的单比与交比都可用距离表示；线段 AB 的仿射中点也是距离意义下的中点. 在欧氏平面上，单比 $A(PQR)=\dfrac{PR}{QR}$，这里 PR 与 QR 可以看成线段的有向距离. 同样，交比 $R(AB,CD)=\dfrac{AC}{BC}\cdot\dfrac{BD}{AD}$ 中 AC,BC,BD,AD 也可看成线段的有向距离.

下面叙述并证明 E. Laguerre 的一个定理，它建立了欧氏平面上两直线的夹角与交比的关系. 此定理在第五章与第六章讨论双曲与椭圆几何时也有用.

设 A 是欧氏平面上的普通点，A 与圆点的连线 AI,AJ 称为过 A 的极小直线. 对于点 $A(a_1,a_2,a_3)$，极小直线 AI 的方程是 $\mathrm{i}a_3x_1-a_3x_2-(\mathrm{i}a_1-a_2)x_3=0$，$AJ$ 是 $-\mathrm{i}a_3x_1-a_3x_2+(\mathrm{i}a_1+a_2)x_3=0$. 如果复数 $z=\rho e^{\mathrm{i}\theta}$，$\rho>0$，$-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$，则 $\ln z=\ln\rho+\mathrm{i}\theta$ 叫做复数 z 的自然对数的主部.

定理 4.3.5(Laguerre) 设 ξ,η 是欧氏平面上两直线，τ_1,τ_2 是过 $A=\xi\times\eta$ 的极小直线，则 ξ 与 η 的夹角是

$$\theta=\frac{1}{2}|\ln R(\xi\eta,\tau_1\tau_2)|.$$

证 如图 4-3-2，设直线 ξ,η 的方程是

$$\xi: x\sin\alpha-y\cos\alpha+\lambda=0,$$

$$\eta: x\sin\beta-y\cos\beta+\mu=0,$$

其中 α,β 分别是直线 ξ,η 与 x 轴的夹角，$0\leqslant\alpha,\beta\leqslant\pi$，$\theta=|\alpha-\beta|$. 四直线 ξ,η,τ_1,τ_2 与 $\alpha_\infty: x_3=0$ 的交点依次是

$$(\cos\alpha,\sin\alpha,0),(\cos\beta,\sin\beta,0),$$

$$(1,\mathrm{i},0),(1,-\mathrm{i},0).$$

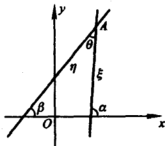


图 4-3-2

因此

$$R(\xi\eta,\tau_1\tau_2)=\frac{\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1\\ \sin\alpha & \mathrm{i}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\beta & 1\\ \sin\beta & \mathrm{i}\end{vmatrix}}\cdot\frac{\begin{vmatrix}\cos\beta & 1\\ \sin\beta & -\mathrm{i}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1\\ \sin\alpha & -\mathrm{i}\end{vmatrix}}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\alpha-\beta)}$$

所以

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln R(\xi\eta,\tau_1\tau_2)=\alpha-\beta.$$

推论 4.3.6 欧氏平面上直线 $\xi:\xi_1x+\xi_2y+\xi_3=0$ 与 $\eta:\eta_1x+\eta_2y+\eta_3=0$ 垂直的充要条件是下列两条件之一成立：

（ⅰ）$\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2=0$；（ⅱ）$\xi,\eta,\tau_1,\tau_2$ 是调和直线.

证 $\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2=0$ 是熟知的两直线垂直的条件.

另一方面，由 Laguerre 定理 $R(\xi\eta,\tau_1\tau_2)=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi}=-1$，即 $\theta=\frac{1}{2}|\ln R(\xi\eta,\tau_1\tau_2)|=\frac{\pi}{2}$ 的充要条件是 ξ 与 η 垂直.

4.3.3 欧氏二次曲线

下面讨论射影几何在欧氏平面二次曲线问题上的运用. 在§4.2 中讨论的二次曲线的中心，直径，渐近线等内容在欧氏平面上仍成立，而且可以给以新的内容. 譬如，由于欧氏平面上线段的中点就是距离意义下的中点，过中心的二次曲线的弦也以中心为距离意义下的中点；渐近线在距离意义下也是双曲线的渐近线，也就是说双曲线上点到渐近线的距离随着双曲线上点到中心的距离增加而趋近于 0. 有关二次曲线的对称轴，焦点，准线的讨论见§4.4.

欧氏平面上二次曲线

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

是圆（包含了虚圆，点圆）的充要条件是

$$a_{11}=a_{22}\neq0,\quad a_{12}=0.$$

性质 4.3.7 二次曲线是圆的充要条件是它经过两个圆点.

证明很简单,留作练习.

推论 4.3.8 欧氏平面上不共线的三点决定一圆.

证 设 A,B,C 是欧氏平面上不共线的三点,则 A,B,C,I,J 是无三点共线的五点,由推广的 Steiner 定理,它们决定一条二次曲线.由于圆点 I,J 是一对共轭虚点,可以证明此二次曲线本质上是实曲线.由性质 4.3.7,此二次曲线是圆.

推论 4.3.9 圆的同一弧上的圆周角相等.

证 设 A,B,C,D 是圆上四点,圆点也在圆上,由 Steiner 定理

$$R(CACB,CICJ)=R(DADB,DIDJ).$$

CI,CJ(同理 DI,DJ)是过 $C(D)$ 的极小直线,由 Laguerre 定理,$\angle ACB=\angle ADB$.

例 3 求椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的弦,使它在 $A(2,1)$ 处被等分,并求椭圆的平行于此弦的弦的中点轨迹.

解 如果直线 ξ 与椭圆的交点以 A 为中点,P_∞ 是直线 ξ 上的无穷远点,则点 A 与 P_∞ 共轭,所以 ξ 与 A 的极线平行.点 A 关于椭圆的极线是

$$(2,1,1)\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0,$$

即 $\frac{2}{9}x+\frac{1}{4}y-1=0$,它的过 A 的平行线

$$\xi:8x+9y-25=0$$

为所求弦.其上的无穷远点 $P_\infty\left(\frac{1}{4},-\frac{2}{9},0\right)$的极线

$$x-2y=0$$

就是平行于 ξ 的弦的中点轨迹. 证明留给读者.

例 4 一直线交欧氏平面上双曲线于 $P;Q$,交双曲线的渐近线于 A,B,则 $AP=QB$.

证 下面证明图 4-3-3(a)中直线与双曲线两支各交一点的情况,另一种情况留作练习. 如图 4-3-3(b),设直线 AB 交无穷远直线于 R_∞, OP_∞, OQ_∞ 是双曲线的两条渐近线. 设 R_∞ 关于双曲线的极线是 OT_∞. 记 $D=AB\times OT_\infty$,则 D 与 R_∞ 共轭. 所以

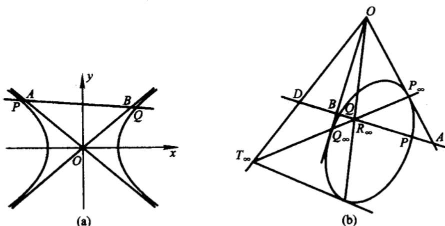


图 4-3-3

$$R(PQ,DR_\infty)=-1,$$

D 是 PQ 的中点. 同理 $R(Q_\infty P_\infty, R_\infty T_\infty)=-1$, OQ_∞, OP_∞, OR_∞, OT_∞ 是调和直线,因此又有

$$R(AB,DR_\infty)=-1.$$

故 D 也是 AB 的中点,因此 $AP=QB$.

此例给出了下面作图问题的解法:

设 ξ,η 是欧氏平面上两条相交直线,P 是不在直线 ξ,η 上的点,求作以 ξ,η 为渐近线,过点 P 的双曲线上的其他点.

在上一节,我们证明了二次曲线的平行弦中点的轨迹是直线,称为二次曲线的直径. 此命题也可叙述成:二次曲线的过无穷远点

的弦的中点轨迹是直径.

下面把此命题中无穷远点改为普通点,求二次曲线的过普通点的弦的中点轨迹.

例 5 设 A 是欧氏平面上定点,求二次曲线 Γ 的过点 A 的弦的中点轨迹,并讨论所得轨迹与原曲线的关系.

解 如图 4-3-4,设 C 是二次曲线 Γ 的中心,如果 Γ 是抛物线,则 C 是无穷远点. 如果 A 是二次曲线的中心,轨迹退化为一点,就是中心. 以下假设 A 不是二次曲线的中心.

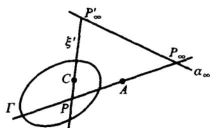


图 4-3-4

设过 A 的直线与 α_∞ 交于 P_∞,P_∞ 的极线是过中心 C 的直线 ξ'. 点 $P=\xi'\times AP_\infty$ 与 P_∞ 关于 Γ 共轭,它是 AP_∞ 关于二次曲线所成弦的中点. 根据第三章性质 3.2.8,点 P_∞ 到 $P'_\infty=\xi'\times\alpha_\infty$ 决定无穷远直线上的一个对合,所以有线束 A 与 C 之间的射影映射

$$A(AP_\infty,\cdots)\barwedge C(\xi',\cdots),$$

它的对应直线的交点的轨迹是一条二次曲线. 这就是过定点 A 的二次曲线弦的中点轨迹,A,C 也在此二次曲线上. 设所得二次曲线是 Γ',下面考虑 Γ' 退化的条件.

如果 Γ' 退化,则 $A(AP_\infty,\cdots)\barwedge C(\xi',\cdots)$ 是透视,这时 CA 是自对应直线. 由此映射的构造,这时 CA 上无穷远点 R_∞ 是自共轭点,$CA=CR_\infty$ 是自共轭直线,它就是 R_∞ 处的切线. 由于 A 是欧氏平面上点,CA 不是无穷远直线,不难知道这时 Γ 是双曲线,A 在渐近线 CR_∞ 上.

下面求 Γ' 的解析表示. 设二次曲线 Γ 的方程是 $(x,y,1)A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$,定点 $A(x_0,y_0)$. 过点 $P(\bar{x},\bar{y})$ 与 A 的直线的参数方

程可以表示成

$$\begin{cases} x = \bar{x} + t(\bar{x} - x_0), \\ y = \bar{y} + t(\bar{y} - y_0). \end{cases}$$

直线 AP 与 Γ 的交点由下式给出：

$$(\bar{x} + t(\bar{x} - x_0), \bar{y} + t(\bar{y} - y_0), 1) A \begin{pmatrix} \bar{x} + t(\bar{x} - x_0) \\ \bar{y} + t(\bar{y} - y_0) \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

点 P 是直线 AP 与 Γ 的交点所成弦(包含交于一点或一对共轭虚点所成弦的情况)的中点的充要条件是上式的两根 t_1 与 t_2 之和为 0,即

$$(\bar{x} - x_0, \bar{y} - y_0, 0) A \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

记 $F_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$, $F_2(x, y) = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}$. 我们证明了,$P(x, y)$是过点 A 的弦的中点的充要条件是

$$(x - x_0)F_1(x, y) + (y - y_0)F_2(x, y) = 0,$$

此即二次曲线 Γ'的方程. Γ 与 Γ' 的二次项部分是相同的,它们是同类型的二次曲线.

下面是 Γ 为标准方程的情况：

(1) $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

$$\Gamma': \frac{\left(x - \frac{x_0}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y - \frac{y_0}{2}\right)^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{4a^2} + \frac{y_0^2}{4b^2};$$

(2) $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 或 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$,

$$\Gamma': \frac{\left(x - \frac{x_0}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(y - \frac{y_0}{2}\right)^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{4a^2} - \frac{y_0^2}{4b^2};$$

(3) $\Gamma: y^2 = 2px$,

$$\Gamma': \left(y - \frac{y_0}{2}\right)^2 = p(x - x_0) + \frac{1}{4}y_0^2.$$

在上面(1),(2)中 Γ' 仅与 $a^2:b^2$ 有关.如果 $A(x_0, y_0)$ 沿某一直线趋于无穷远点,则 Γ' 成为 Γ 的一条直径.图 4-3-5(a)到 4-3-5(c)是 Γ 为圆的情况,Γ' 上虚线表示由过 A 的直线与 Γ 交于两虚点所得的轨迹.

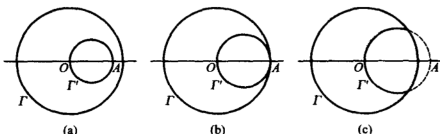
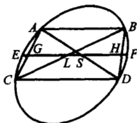


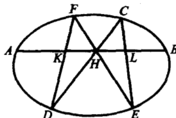
图 4-3-5

习题 4.3

1. 设 AB, CD, EF 是欧氏平面上二次曲线的三条平行弦,如图得 G, L, S, H,试证 $EG = HF$, $GL = SH$.



习题 1



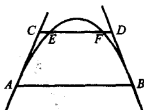
习题 2

2. 如图,设 H 是二次曲线的弦 AB 上点,CD 与 EF 是过 H 的弦,$K = DF \times AB$, $L = CE \times AB$,求证

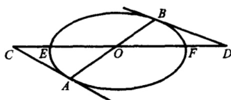
$$\frac{1}{HB} + \frac{1}{KH} = \frac{1}{AH} + \frac{1}{HL},$$

其中 HB, KH, AH, HL 是有向线段.

3. 如图,设 AB, EF 是二次曲线的两条不相交的弦,直线 EF 与 A, B 处切线分别交于 C, D. 试证, AB 平行于 EF 的充要条件是 $CE = FD$.



习题 3

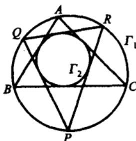


习题 4

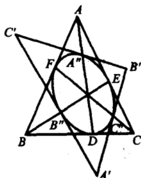
4. 如图,设 AB, EF 是二次曲线的两条弦,相交于 O, 直线 EF 与 A, B 处切线分别交于 C, D. 试证, O 是线段 EF 的中点的充要条件是 $CE = FD$.

5. 设椭圆内切于 $\triangle ABC$ 的三边于 D, E, F, 而 O 是 AD, BE, CF 的交点. 求证: O 是 $\triangle ABC$ 的重心的充要条件是 O 也是椭圆的中心, 这时 $AT = OD$, T 是 AD 与椭圆的另一交点.

6. 如图,设 Γ_1 与 Γ_2 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆, P 是 Γ_1 上任一点,过 P 作 Γ_2 的切线分别交 Γ_1 于 Q, R, 证明 QR 也是 Γ_2 的切线.



习题 6



习题 7

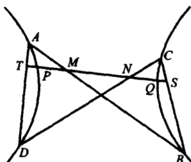
7. 如图,设椭圆内切于 $\triangle ABC$ 的三边于 D, E, F; A'', B'', C'' 分别是 AD, BE, CF 与椭圆的另一交点, $\triangle A'B'C'$ 外切椭圆于 A'', B'', C'', 求证:

(1) A' 在直线 AD 上, B' 在 BE 上, C' 在 CF 上;

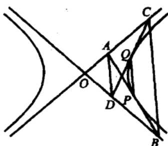
(2) 三点形 ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, DEF 两两成透视,它们的透视轴是什

么关系.

8. 如图,设 PQ 是二次曲线的一弦,M,N 是弦上点,使 $PM=NQ$.过 M 和 N 任意作两弦 AB 和 CD,若 AD 和 BC 分别交 PQ 于 T,S,则 $TM=NS$(图中是双曲线的情况).



习题 8



习题 10

9. 双曲线的任一切线交渐近线于两点,试证:切点是此两点的中点.

10. 如图,设 P,Q 是双曲线上两点,P,Q 处切线分别交双曲线的渐近线于 A,B,C,D,试证:

(1) $AD /\!/ BC /\!/ PQ$;

(2) $\triangle OAB$ 的面积与切点 P 选取无关,O 是渐近线的交点;

(3) 如果 P,Q 是双曲线两支上各一点,上述结论是否成立.

11. 从双曲线上任一点引直线平行于渐近线,证明这两直线和渐近线所成平行四边形的面积一定.

12. 设 φ 是欧氏平面上的映射,存在常数 $\lambda>0$,使得对任意平面上的点 P,Q,它们的像 $P'=\varphi(P)$,$Q'=\varphi(Q)$,都有 $|P'Q'|=\lambda|PQ|$.试证 φ 是欧氏平面上的相似变换.

13. 证明每一个欧氏变换都可以表示为不多于三个反射的乘积.

14. 设 φ 是欧氏平面上的欧氏变换,φ 不是恒等变换,试证:

(1) 如果 φ 恰好有一个不动点,那么 φ 是绕这个不动点的旋转;

(2) 如果 φ 有两个不动点,则此两点连线上每一点都是不动点;如果 φ 没有其它不动点,φ 是以此直线为轴的反射.

15. 没有不动点且 $|A|=1$ 的欧氏变换是平移.

16. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程可以表示为 $x=a\cos t, y=b\sin t$,对于

t 的任一定值，$A(a\sin t, b\cos t)$，$B(a\cos t, -b\sin t)$ 是椭圆上两点，试证直线 OA 与 OB 是一对共轭直径，并且线段 OA 与 OB 的长度的平方和是常数.

17. 写出双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的相应于 16 题的结论，并证明.

§4.4 二次曲线的对称轴，焦点与准线

下面用射影几何的观点处理二次曲线的对称轴，焦点与准线，它们在欧氏几何与解析几何中都讨论过. 通过这些内容的学习，我们对于二次曲线的几何背景会有进一步的了解，对处理二次曲线的问题会有一些新的方法. 下面只讨论欧氏平面上非退化且有实轨迹的二次曲线，也就是只讨论椭圆，双曲线，抛物线，把圆看成特殊的椭圆.

4.4.1 二次曲线的对称轴

我们已经知道，二次曲线的直径(除双曲线的渐近线外)是平行弦中点的轨迹，二次曲线的直径如果平分垂直于它的弦，那么这种直径是二次曲线的对称轴.

对称轴也叫二次曲线的主轴，或主直径. 显然圆的任一条直径是对称轴.

性质 4.4.1 抛物线只有一条对称轴. 如果 C_∞ 是抛物线上的无穷远点，P_∞ 是 I, J, C_∞ 的第四调和点，那么 P_∞ 的极线就是抛物线的对称轴.

证 如图 4-4-1，设 ξ 是抛物线的一条对称轴，ξ 经过抛物线上的无穷远点 C_∞. 由于 ξ 是直径，ξ 的极点是无穷远点，设为 P_∞. 又由于 ξ 是对称轴，过 P_∞ 的直线都与 ξ 垂直. 设 D 是过 P_∞ 的直线 η 与 ξ 的交点，根据 Laguerre 定理，$R(DIDJ,$

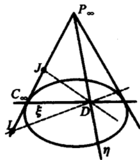


图 4-4-1

$DP_\infty DC_\infty) = -1$，即 P_∞ 是 I, J, C_∞ 的第四调和点．另一方面，容易证明这样的 P_∞ 的极线是抛物线的对称轴．因为无穷远直线上点 I, J, C_∞ 的第四调和点 P_∞ 是唯一的，抛物线的对称轴也只有一条，就是 P_∞ 的极线．

对称轴与二次曲线的交点叫二次曲线的顶点，性质 4.4.1 证明了抛物线只有一个顶点．

例 1 求二次曲线 $x^2+2xy+y^2+2x+y=0$ 的对称轴，并化简二次曲线的方程．

解 将二次曲线写成齐次坐标方程：

$$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+2x_1x_3+x_2x_3=0,$$

它与无穷远直线的交点是 $C_\infty(1,-1,0)$，曲线是抛物线．不难知道，$P_\infty(1,1,0)$ 是 I, J, C_∞ 的第四调和点，P_∞ 的极线是 $2x_1+2x_2+\frac{3}{2}x_3=0$，因此

$$4x+4y+3=0$$

是抛物线的对称轴，它与二次曲线的交点 $A\left(\frac{3}{16}, -\frac{15}{16}\right)$ 是抛物线的顶点．过 A 垂直于对称轴的直线是

$$x-y-\frac{9}{8}=0.$$

如果取 $4x+4y+3=0$ 与 $x-y-\frac{9}{8}=0$ 为新的坐标轴，作直角坐标变换

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-y-\frac{9}{8}\right), \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+y+\frac{3}{4}\right), \end{cases}$$

代入 $x^2+2xy+y^2+2x+y=0$ 可化简抛物线的方程为

$$4y'^2+\sqrt{2}x'=0.$$

例 2 设 $\Gamma: a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ 是欧氏平面上的抛物线.证明抛物线的顶点是原点 $O(0,0)$ 的充要条件是

$$a_{11}a_{13}^2+a_{22}a_{23}^2+2a_{12}a_{13}a_{23}=0, a_{33}=0.$$

这时抛物线的对称轴是

$$a_{11}x+a_{12}y=0 \text{ 或 } a_{12}x+a_{22}y=0.$$

证 Γ 是抛物线,$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$,$a_{11}:a_{12}=a_{12}:a_{22}$. a_{11},a_{22} 不同时为零,假设 $a_{11}\neq 0$,条件 $a_{11}a_{13}^2+a_{22}a_{23}^2+2a_{12}a_{13}a_{23}=0$ 成为

$$(a_{11}a_{13}+a_{12}a_{23})^2=0, \text{ 即 } a_{11}a_{13}+a_{12}a_{23}=0.$$

另一方面,抛物线上的无穷远点是 $C_\infty(a_{12},-a_{11},0)$,$P_\infty(a_{11},a_{12},0)$ 是 I,J,C_∞ 的第四调和点.抛物线的顶点是原点的充要条件是 P_∞ 与原点 O 共轭且原点在抛物线上,即

$$a_{11}a_{13}+a_{12}a_{23}=0, \ a_{33}=0.$$

这证明了,抛物线的顶点是原点的充要条件是

$$a_{11}a_{13}^2+a_{22}a_{23}^2+2a_{12}a_{13}a_{23}=0, \ a_{33}=0.$$

P_∞ 的极线

$$(a_{11}^2+a_{12}^2)x+(a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22})y=0$$

是抛物线的对称轴.以 $a_{22}=\dfrac{a_{12}^2}{a_{11}}$ 代入得

$$a_{11}x+a_{12}y=0.$$

如果 $a_{22}\neq 0$,则抛物线的对称轴也可以表示为

$$a_{12}x+a_{22}y=0.$$

从§4.2 知道,椭圆与双曲线都是中心二次曲线,它们的中心是欧氏平面上的普通点.

性质 4.4.2 除圆外的有心二次曲线有且只有两条互相垂直(且共轭)的对称轴.如果无穷远点 P_∞,Q_∞ 共轭,且 $R(IJ,P_\infty Q_\infty)=-1$,则 P_∞ 与 Q_∞ 的极线就是二次曲线的两条对称轴.

证 如图 4-4-2，设 ξ 是二次曲线的一条对称轴，ξ 过二次曲线的中心 C. 设 P_∞ 是 ξ 上的无穷远点，ξ 的极点是无穷远点 Q_∞，则 P_∞ 与 Q_∞ 共轭；由过 Q_∞ 的直线与 ξ 垂直，从 Laguerre 定理可知，I,J,P_∞,Q_∞ 是调和点列，这证明了性质中条件是必要的. 而如果 P_∞,Q_∞ 满足性质中的两条件，C 是二次曲线的中心，则 C,P_∞,Q_∞ 构成二次曲线的自极三点形，且 CP_∞ 与 CQ_∞ 互相垂直. CP_∞ 与 CQ_∞ 是两条互相垂直且共轭的直径，这说明它们都是对称轴. 下面证明这样的点 P_∞,Q_∞ 对于有心二次曲线(除圆)有且只有两点，因此对称轴也只有两条(这一结论也可用后面的习题 8 证明).

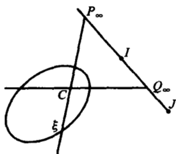


图 4-4-2

设二次曲线的方程是 $\sum a_{ij}x_ix_j=0$，$P_\infty(\lambda_1,\lambda_2,0)$，$Q_\infty(\mu_1,\mu_2,0)$ 共轭，且过 P_∞,Q_∞ 的直线互相垂直，得

$$\begin{cases}a_{11}\lambda_1\mu_1+a_{12}(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)+a_{22}\lambda_2\mu_2=0,\\ \lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2=0.\end{cases}$$

由于二次曲线不是圆，$a_{11}=a_{22}$ 与 $a_{12}=0$ 不能同时成立，上述方程有且只有一对解. 这证明了有心二次曲线(除圆外)有且只有一对互相垂直的对称轴，分别是 P_∞,Q_∞ 的极线.

例 3 二次曲线 $x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0$ 的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}2&-3&10\\-3&2&-10\\10&-10&42\end{pmatrix}$. 由本节后习题 1，方程 $\lambda_1^2-\lambda_2^2=0$ 的解决定的点 $P_\infty(1,1,0)$，$Q_\infty(1,-1,0)$ 的极线

$$x+y=0,\quad x-y+4=0$$

是两条对称轴. 作直角坐标变换

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y + 4), \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \end{cases}$$

以 $x - y = \sqrt{2}x' - 4, x + y = \sqrt{2}y', xy = \frac{1}{4}[(\sqrt{2}y')^2 - (\sqrt{2}x' - 4)^2]$代入原方程,二次曲线的方程可化简为

$$5x'^2 - y'^2 + 2 = 0.$$

4.4.2 焦点与准线

定义 4.4.1 如果过欧氏平面上点 F 的二次曲线的任一对共轭直线垂直,那么 F 叫做二次曲线的*焦点*,F 的极线叫二次曲线的*准线*.

下面从焦点的射影定义出发来讨论焦点的存在性及它的一些性质.二次曲线上的点都是自共轭点,过这种点的任一直线与这一点的切线共轭,所以二次曲线上点不可能是焦点.类似地,二次曲线的切线是自共轭直线,切线上点也不能是焦点,因此焦点必是二次曲线的内点(无切线点).由于过圆心的共轭直线都是垂直的,圆的圆心是焦点,它的极线是无穷远直线.

引理 4.4.3 二次曲线的焦点总在对称轴上,此焦点对应的准线垂直于这一主直径.

证 设 F 是二次曲线 Γ 的一个焦点,C 是无穷远直线的极点.如果 Γ 是抛物线,C 是无穷远点;如果 Γ 不是抛物线,则 C 是 Γ 的中心.若 $C = F$,则二次曲线的任一对共轭直径垂直,这时二次曲线关于任一直径对称,它一定是圆.如图 4-4-3,设 C 与 F 是相异两点,$\xi = CF$ 的极点在无穷远直线上,设为 P_∞.直线 $\eta =$

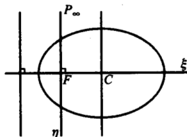


图 4-4-3

FP_∞与ξ共轭,由于F是焦点,它们也垂直.所以过P_∞的任一直线与ξ垂直,而ξ是过P_∞的平行弦中点的轨迹,它是二次曲线的对称轴.另一方面焦点F的极线过P_∞,F对应的准线也垂直于ξ.

性质 4.4.4 抛物线有一个焦点,在标准方程$y^2=2px$下,焦点是$\left(\frac{p}{2},0\right)$,准线是$x=-\frac{p}{2}$.

证 由引理4.4.3,可设$F(a,0)$是焦点,$\xi:\lambda(x-a)+\mu y=0$是过F的任一直线,此直线的极点是$\left(\frac{\lambda a}{p},\mu,-\frac{\lambda}{p}\right)$.$\xi$的过$F$的共轭直线是$\eta:-\mu x_1+\frac{2}{p}\lambda a x_2+\mu a x_3=0$.由假设$F$是焦点,$\xi$与$\eta$垂直,即$-\lambda\mu+\frac{2}{p}\lambda\mu a=0$.由于$\lambda,\mu$任意,$a=\frac{p}{2}$.这证明了抛物线$y^2=2px$只有一个焦点$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,准线是$x=-\frac{p}{2}$.

下面两性质的证明与性质4.4.4类似.

性质 4.4.5 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的焦点是$F_1(\sqrt{a^2-b^2},0)$,$F_2(-\sqrt{a^2-b^2},0)$,对应的准线分别是$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$,$x=-\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

圆可以看成是椭圆的特殊情况,圆只有一个焦点就是圆心,准线退化为无穷远直线.

性质 4.4.6 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点是$F_1(\sqrt{a^2+b^2},0)$,$F_2(-\sqrt{a^2+b^2},0)$,对应的准线分别是$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$,$x=-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

本节后习题8-12给出了抛物线,椭圆,双曲线的焦点存在的

几何证明及作法，它们也给出了焦点的一些有趣性质.

例 4 设 F 是二次曲线的一个焦点，T 是二次曲线上弦 PQ 的极点，PQ 交 F 对应的准线于 R，则 TF 与 RF 分别是 $\angle PFQ$ 的内外角平分线.

证 如图 4-4-4，ξ 是 F 对应的准线. 由于 R 与 T,F 都共轭，R 的极线是 TF，直线 FR 与 TF 也共轭. 由假设 F 是焦点，FR 与 TF 垂直. $P,Q,S=FT\times PQ,R$ 是调和点列，根据 §1.5，习题 9，TF 与 RF 是 $\angle PFQ$ 的内外角平分线.

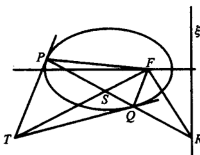


图 4-4-4

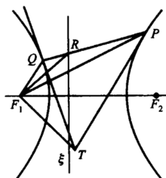


图 4-4-5

如果例 4 中二次曲线是双曲线，P,Q 是双曲线两支上各一点. 如图 4-4-5，RF_1 是 $\angle PF_1Q$ 的内角平分线，而 TF_1 是 $\angle PF_1Q$ 的外角平分线.

例 5 设抛物线的两切线交于 C，切点是 A,B，抛物线的顶点 D 处的切线与 CA,CB 分别交于 S,T；F 是抛物线的焦点. 证明 C,S,T,F 四点共圆.

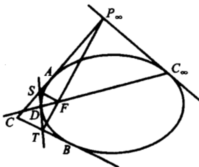


图 4-4-6

证 如图 4-4-6，过 F 作 CA 的平行线，它与 CA 交于 P_∞，C_∞ 是抛物线上的无穷远点. 由 §3.3，例

4 可知，SF 与 FP_{∞} 共轭，而 F 是焦点，SF 与 FP_{∞} 垂直，SF 与 CA 也垂直. 同理，TF 与 CB 垂直，所以四点 C,S,T,F 共圆.

利用例 4 和例 5 进一步可以证明抛物线的焦点的光学性质：

设 η 是抛物线的任一切线，切点是 A，ξ 是过 A 平行于抛物线的对称轴的直线；F 是抛物线的焦点，则 AF 与 η 的交角和 ξ 与 η 的交角相等.

如图 4－4－7，DF 是抛物线的对称轴，E 是 DF 与 η 的交点，S 是 D 处切线与 η 的交点. 由例 4，SF 是 $\angle AFE$ 的角平分线；从例 5 的证明知道，FS 垂直于 η. 所以 $\angle EAF = \angle AEF$，三角形 EFA 是等腰三角形，这证明了抛物线的焦点的光学性质.

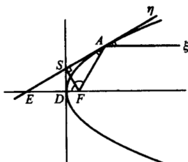


图 4－4－7

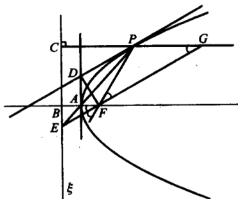


图 4－4－8

下面利用焦点的射影定义推出离心率的概念.

性质 4.4.7 设 F 是二次曲线的一个焦点，ξ 是相应的准线，那么二次曲线上任一点到 F 的距离与到 ξ 的距离之比是一个常数，此常数称为二次曲线的离心率.

证 如图 4－4－8，设 P 是二次曲线上任一点，B 是 ξ 与过 F 的对称轴的交点，C 是 P 向 ξ 作垂线的垂足，$PC /\!/ BF$. 如图，设 A 是 BF 与二次曲线的交点，A 在线段 BF 上. 下面证明 $|PF|:|PC| = |AF|:|AB|$.

设 P 处切线与 A 处切线交于 D，AP 与 ξ 交于 E，EF 交 CP 于

G.由例 4 知道,DF 与 EF 分别是$\angle PFA$ 的内外角平分线.在$\triangle PFG$ 中$\angle PFG=\angle PGF$,从而$|PG|=|PF|$.在$\triangle ECG$ 中,$BF // CG$,因此$|CP|:|PF|=|CP|:|PG|=|BA|:|AF|$是常数.

如果图 4-4-8 中二次曲线是抛物线,则 B,F,A 与抛物线上的无穷远点是调和点列,$BA=AF$,抛物线的离心率等于 1.利用标准方程,易知椭圆的离心率小于 1,双曲线的离心率大于 1.利用性质 4.4.7 容易证明:

椭圆上点到两焦点距离之和是常数;双曲线到两焦点距离之差是常数.

下面的性质可看成是焦点的另一种射影定义:

二次曲线的过圆点 I,J 的虚切线的实交点是二次曲线的焦点,并且任一焦点可以这样生成.

习题 4.4

1. 设二次曲线 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ 是有心二次曲线.试证,如果 λ_1,λ_2 不全为 0 满足:$a_{12}(\lambda_1^2-\lambda_2^2)+(a_{22}-a_{11})\lambda_1\lambda_2=0$,则

$$(x,y,1)(a_{ij})\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ 0\end{pmatrix}=0$$

是二次曲线的对称轴.

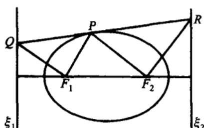
2. 设二次曲线 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ 是抛物线,$P_\infty(\lambda,\mu,0)$是其上的无穷远点,则

$$(x,y,1)(a_{ij})\begin{pmatrix}-\mu\\ \lambda\\ 0\end{pmatrix}=0$$

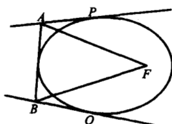
是抛物线的对称轴.

3. 证明双曲线的对称轴是它的渐近线的角平分线.

4. 试证二次曲线上任一切线上切点及它与准线的交点所成线段对焦点张成直角(图中是椭圆的情况).



习题 4



习题 5

5. 设二次曲线的任意切线交两定切线于 A,B,点 F 是二次曲线的焦点,则$\angle AFB$ 是定角. 如果两定切线上切点与 F 共线,则$\angle AFB=\frac{\pi}{2}$.

6. 如果抛物线的两切线相交成直角,证明:两切线上切点的连线通过焦点,且两切线的交点位于准线上.

7. 如果三点形的边都与抛物线相切,则三点形的三个顶点与抛物线的焦点四点共圆.

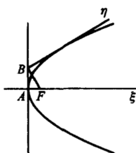
8. 设 $\varphi:S(\xi)\barwedge S(\xi')$是欧氏平面上线束 S 的一个对合,试证:

(1) 线束 S 中有一对互相垂直的对应直线.

(2) 如果线束中有两对对应直线都互相垂直,则 φ 的任意一对对应直线互相垂直.

9. 设 $\varphi:S(\xi)\rightarrow S(\xi')$是线束 S 的一个对合,已知 φ 的两对对应直线ξ,ξ';η,η',作出它的两条互相垂直的对应直线.

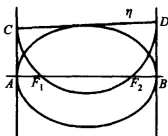
10. 设直线 ξ 是抛物线的对称轴,A 是抛物线的顶点. 抛物线的任一切线 η 交 A 处切线于 B,过 B 作 η 的垂线交 ξ 于 F,则 F 是抛物线的焦点.



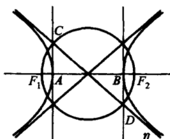
习题 10

11. 设 AB 是椭圆的长轴,椭圆的任一切线交 A,B 处切线于 C,D,以 CD 为直径的圆交 AB 于 F_1,F_2,试证 F_1,F_2 是椭圆的焦点.

12. 设 AB 是双曲线的实轴,η 是一条渐近线,它与 A,B 处切线交于 C,D,则以 CD 为直径的圆与AB 的两个交点就是双曲线的焦点.



习题 11



习题 12

13. 设 F_1, F_2 是椭圆的焦点，ξ 是椭圆的切线，切点是 P，试证，F_1P 与 F_2P 和 ξ 的夹角相等.

14. 设 F_1, F_2 是双曲线的焦点，ξ 是双曲线的切线，切点 P，试证，F_1P 与 F_2P 和 ξ 的夹角相等.

§4.5 欧氏，仿射，射影三种几何的比较

这一章我们从射影几何出发讨论了仿射平面与欧氏平面，并初步了解了它们之间的相互关系. 仿射平面是把射影平面上一条直线看作无穷远直线得到的；欧氏平面是在仿射平面上定义了欧氏度量以后得到的. 自然，在射影平面上取不同的直线作为无穷远直线得到不同的仿射平面；同样，在仿射平面上也可定义不同的欧氏度量，得到不同的欧氏平面. 但是可以证明，所得到的仿射几何与欧氏几何分别都是一样的. 我们已经知道如何利用射影几何来研究仿射与欧氏几何，许多仿射与欧氏几何的问题可以用射影几何的方法解决.

在讨论欧氏，仿射，射影几何时我们只讨论它们在各自变换群下不变的性质与量. 对于射影几何，变换群是直射变换群，主要的射影性质是点和直线的结合关系，主要的不变量是交比，根据 Steiner 定理，二次曲线可用点与直线的结合关系来定义，所以二

次曲线也是射影几何研究的内容.仿射几何的变换群是仿射变换群,它是由直射变换群里那些使无穷远直线为不动直线的直射构成;而欧氏变换群又是仿射变换群的子群.这三种几何的变换群的关系是:

$$欧氏变换群\subset仿射变换群\subset直射变换群.$$

在欧氏几何里,两点之间的距离是最基本的不变量,单比与交比都可以用距离表示;利用余弦定理可知,两直线的夹角也可以从距离得到.按照定理 4.3.4,欧氏平面上的映射是欧氏变换的充要条件是它保持任意两点之间的距离,因此所有的欧氏性质可以用距离来叙述.例如,欧氏平面上三点共线的充要条件可用距离表示为:此三点中存在两点,使此两点的距离等于此两点分别和第三点的距离之和.

不难知道,直射变换群依赖于 8 个独立的参数;仿射交换群依赖于 6 个独立的参数;而欧氏变换群依赖于 3 个独立的参数.从这些几何的研究我们知道,变换群越小,则相应的几何内容越丰富.

在一种几何里的两个图形,如果存在变换群里的一个变换把一个图形变成另一个,我们称这两个图形是合同的或全等的,这种关系是等价关系.以三角形全等为例.在仿射平面上任意两个三角形全等;在欧氏几何里两个三角形全等的充要条件是它们的三边长对应相等,欧氏几何里有许多不全等的三角形.在欧氏几何里关于三角形有许多名称,如直角三角形,锐角三角形,等边三边形等.而在射影几何,到现在为止我们使用三点形,三线形这些术语.这是因为射影直线上两点将它分成两条线段,因此射影平面上不共线的三点不能唯一的确定三条线段.在 §6.2,我们将定义射影平面上三角形,按照那里的定义,由射影平面上不共线的三点可确定四个不同的三角形.又譬如,在射影几何里所有非退化有实轨迹的二次曲线都是全等的;而在仿射几何里,它们可以分成椭圆,双曲线,抛物线.在仿射几何里,椭圆,双曲线,抛物线分别是全等的.但是在欧氏几何里,仅圆就有许多,两圆全等的条件是它们的半径相

同. 就射影, 仿射, 欧氏三种几何的内容来说

$$射影几何\subset仿射几何\subset欧氏几何.$$

我们对射影, 仿射, 欧氏三种几何的这一包含关系再作一些说明. 任意一个射影平面上关于点与直线结合关系的命题也可看成由仿射平面或欧氏平面得到的拓广平面上的命题, 而由特殊直线的不同选取, 射影几何中命题成为仿射或欧氏几何中不同的命题. 而反过来不一定成立, 例如在仿射或欧氏几何里关于椭圆, 双曲线, 抛物线的有关仿射或度量的性质在射影几何里一般是不成立的, 甚至没有意义. 又例如, 交比是射影几何的基本不变量, 自然也是仿射与欧氏几何的不变量. 但是如前所说, 在欧氏几何里, 两点之间的距离是更基本的不变量, 交比可以用距离表示; 而欧氏距离在射影几何里没有意义. 在这个意义上, 我们把射影几何看作仿射几何的子几何, 把仿射几何看作欧氏几何的子几何, 这些是 Klein 的变换群观点. 关于 Klein 的变换群观点, 变换群与几何学的关系我们在 §6.3 还要作进一步的说明.

下面以二次曲线理论中一个命题为例进一步说明这几种几何的关系, 下面的定理是 §3.2 中性质 3.2.11.

定理 4.5.1 设 P 是射影平面上二次曲线 Γ 上点 A, B 处切线的交点, 过 P 的任一直线交 Γ 于 C, D, 则

(i) C, D 处切线的交点 E 在 AB 上;

(ii) $R(AB, FE) = R(PF, CD) = -1$, 其中 $F = AB \times CD$;

(iii) E, F, P 构成 Γ 的自极三点形.

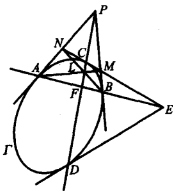


图 4-5-1

如果图 4-5-1 中 P 是无穷远点, 过 P 的直线成为仿射或欧氏平面上的平行线, 并且 F 是二次曲线上弦 CD 的中点, 于是从定理 4.5.1 可得

定理 4.5.2 仿射(或欧氏)平面

上二次曲线(可以是椭圆,双曲线或者抛物线)的平行弦中点的轨迹在一条直线上,并且这些平行弦端点处切线的交点也在这条直线上.这条直线过二次曲线的中心,是二次曲线的直径.

如果 A,B 是无穷远点,Γ 是双曲线,AP,BP 是它的渐近线,P 是双曲线的中心,过 P 的弦以 P 为中点,从定理 4.5.1 得到

定理 4.5.3 双曲线的两条渐近线交于中心,过中心的任一弦以中心为中点,此种弦端点处切线平行.

这时 E,F 是无穷远点,从图 4-5-1 还可以知道,过 E 或 F 的任一直线与双曲线和它的两条渐近线交点所成线段相等(§4.3,例 4).

如果 AP 是无穷远直线,则 Γ 成为抛物线,随着无穷远直线上点 P 的不同选取,抛物线的平行弦也不同,但这些平行弦中点的轨迹都过点 A.于是得

定理 4.5.4 抛物线的直径互相平行.

这时由 $R(EF,BA)=-1$,可知 B 是线段 EF 的中点,而 MB 平行于 CD,即

定理 4.5.5 设 E 是欧氏平面上抛物线上两点 C,D 处切线的交点,F 是弦 CD 的中点,设 B 是 EF 与抛物线的交点,MB 是 B 处切线.则 $MB/\!/CD$,且 B 是 EF 的中点,EF 平行于抛物线对称轴(图 4-5-2).

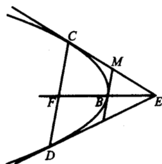


图 4-5-2

如果图 4-5-1 是欧氏平面上图形,F 是二次曲线的焦点,F 的极线是 PE,二次曲线关于焦点 F 的准线是 PE,直线 PF 与 EF 互相垂直.进一步可以证明 FN 与 FM 也互相垂直,FM,FN 是$\angle PFE$ 的内外角平分线,$\angle NFP=\frac{\pi}{4}$.

我们知道欧氏平面上无三点共线的五点决定一条二次曲线,

这五点自然也决定了二次曲线的类型，即决定了它是抛物线，双曲线，还是椭圆．这五点同样决定了二次曲线的其它性质，例如它的对称轴，焦点，顶点等．下面讨论如何从二次曲线的一些已知的点与切线来了解二次曲线，譬如怎样从这些已知的点与切线判断它的类型，如何作出它的对称轴，渐近线，顶点等，即研究二次曲线的部分与整体的关系．希望通过这些讨论对欧氏平面上的二次曲线的理论有进一步的了解，也对欧氏几何与射影几何的关系有进一步的了解．下面有些作法对仿射平面上的二次曲线也成立，例如双曲线的渐近线，抛物线的直径等．

根据 Pascal 定理和 Brianchon 定理，从已知的二次曲线的点与切线可以作出其它的点与切线．我们只考虑已知二次曲线的三条切线及其中两条上的切点，并且此两切点在另一切线的同一侧，即图 4－5－3 的情况．其他情形可以通过作切点切线转化为这种情况或类似讨论．

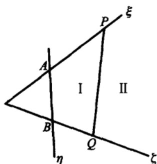


图 4－5－3

如图 4－5－3，设 ξ,η,ζ 是欧氏平面上不共点的三条直线，P,Q 分别是 ξ，ζ 上点，那么存在唯一的以 ξ,η,ζ 为切线，P,Q 是切点的二次曲线 Γ．线段 PQ 把 ξ,η,ζ 所围区域分成区域 I，II．设过点 $A=\xi\times\eta$ 平行于 ζ 的直线与过点 $B=\eta\times\zeta$ 平行于 ξ 的直线交于 R．

定理 4.5.6 二次曲线 Γ 是抛物线，双曲线，椭圆的充要条件分别是

（ⅰ）点 R 在线段 PQ 上；（ⅱ）点 R 在区域 I 内；（ⅲ）点 R 在区域 II 内．

证 以 α_∞ 记欧氏平面的拓广平面上的无穷远直线．对退化六边形 $\xi\xi\eta\zeta\zeta\alpha_\infty$ 应用 Brianchon 定理，知 α_∞ 是 Γ 的切线的充要条件是点 R 在线段 PQ 上．如图 4－5－4，设 P_∞ 是 ξ 上无穷远点，

Q_∞是 ζ 上无穷远点，α_∞ 是二次曲线 Γ 的切线，Γ 是抛物线. 如果把 P_∞或 Q_∞ 向左移动，则 α_∞ 与 Γ 有两个交点，二次曲线成为双曲线，这时 R 移到区域Ⅰ内；把 P_∞ 或 Q_∞ 向右移动，二次曲线与 α_∞ 无交点，成为椭圆，而 R 移到区域Ⅱ内. 这就证明了定理.

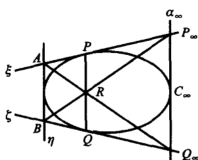


图 4－5－4

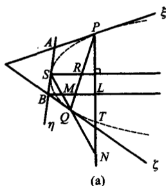
我们先讨论抛物线的局部与整体的关系.

性质 4.5.7 已知抛物线 Γ 的切线 ξ,η,ζ,P,Q 分别是 ξ,ζ 上切点，那么可以作出此抛物线的对称轴，顶点与焦点.

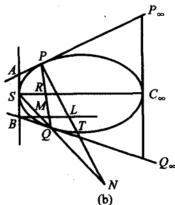
证 二次曲线 Γ 是抛物线，点 R 在线段 PQ 上. 下面先给出抛物线的对称轴的作法.

如图 4－5－5(a)，设 S 是过点 $\xi\times\zeta$ 与 $BP\times AQ$ 的直线与 η 的交点. 利用 Brianchon 定理，知道 S 是 η 上的切点. 设 C_∞ 是 α_∞ 上的切点，同样由 Brianchon 定理知道 S,R,C_∞ 共线，直线 SR 即 RC_∞ 是 Γ 的直径. 如果 PQ 垂直于 SR，则过线段 PQ 的中点而平行于 SR 的直线就是抛物线的对称轴.

如果 PQ 不垂直于 SR，过 P 作 SR 的垂线交 SQ 于 N. 再作



(a)



(b)

图 4－5－5

出 Γ 与此垂线的另一交点 T,过线段 PT 的中点平行于 SR 直线就是抛物线的对称轴.点 T 的作法如下,作 S,Q,N 的第四调和点 M,则 N 关于二次曲线的极线是 BM,作 $L=BM\times PN$,再作 N,L,P 的第四调和点 T.由于 N 的极线是 BM,N 与 L 共轭,而 $R(PT,LN)=-1$,点 P 在二次曲线上,所以 T 是抛物线上点.证明可参看图 4-5-5(b),这里画出了抛物线.

在作出抛物线的对称轴之后,我们来作它的焦点.如图 4-5-6,设所作对称轴是 β,它与 PT 的交点是 X,过点 T 的切线是 γ.因为 β 是对称轴,ξ,γ 的交点在 β 上.过 X 平行于 ξ 的直线与 γ 交于 E;过点 X 平行于 γ 的直线交 ξ 于 F.利用 Brianchon 定理,可知 EF 是 Γ 的切线,且 EF 与 β 的交点 U 是 EF 上切点,也是抛物线的顶点.过点 F 垂直于 ξ 的直线和对称轴 β 的交点 V 是抛物线的焦点,V 是焦点的证明见§4.4 后面习题 10.

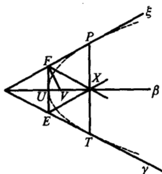


图 4-5-6

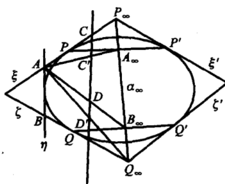


图 4-5-7

性质 4.5.8 已知双曲线 Γ 的切线 ξ,η,ζ,P,Q 分别是 ξ,ζ 上切点,那么可以作出此双曲线的对称轴与渐近线.

证 二次曲线是双曲线,点 R 在区域 Ⅰ 内,作它的渐近线与对称轴的关键是作出二次曲线与无穷远直线的两个交点.作法大致如下,

如图 4-5-7,对退化六边形 $\zeta\zeta\eta\xi\xi\xi'$ 利用 Brianchon 定理可作

出 ξ 的平行切线 ξ'，也可作出其上切点 P'，则 PP' 上的无穷远点 A_∞ 与 P_∞ 共轭；同理可作出 ζ 上无穷远点 Q_∞ 的极线 QQ'，QQ' 上的无穷远点 B_∞ 与 Q_∞ 也共轭.

由共轭点对 $P_\infty, A_\infty; Q_\infty, B_\infty$ 决定 α_∞ 上的一个对合，这一对合的两个不动点就是二次曲线与无穷远直线的两个交点. 作直线依次与 $AP_\infty, AA_\infty, AQ_\infty, AB_\infty$ 交于 C, C', D', D，直线 CC' 上由 $C\to C', C'\to C, D\to D'$ 决定一个对合. 如图 4－5－8，以 $CD, C'D'$ 为直径作半圆交于 Z，$\angle CZC', \angle DZD'$ 的角平分线与 CC' 分别交于点 U, V. 从作法知道，$\angle CZC' = \angle DZD'$，$\angle UZV = \frac{\pi}{2}$，而直线 ZU, ZV 是 $\angle CZC'$ 的内外角平分线，直线 ZV, ZU 是 $\angle DZD'$ 的内外角平分线. 因此，$R(UV, CC') = R(UV, DD') = -1$，这说明 U, V 是 CC' 上对合的两个不动点. 直线 AU, AV 上的无穷远点是 α_∞ 上对合的两个不动点，此两点即是 Γ 与无穷远直线的两个交点. 另一方面，直线 PP', QQ' 的交点 O 是双曲线的中心，过 O 所作 AU, AV 的平行线就是 Γ 上无穷远点的切线，也是双曲线的渐近线，它们的角平分线是 Γ 的对称轴.

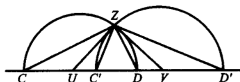


图 4－5－8

为了便于理解作法及相应的证明，图 4－5－7 画出了双曲线及无穷远直线，欧氏平面上的作法由读者完成.

性质 4.5.9 如果已知双曲线的两条渐近线以及一条切线，则可作出此双曲线的顶点与焦点.

证 如图 4－5－9，设双曲线的渐近线是 β, γ，它们的交点 O

是双曲线的中心，ξ 是双曲线的一条切线. 我们知道，双曲线的任一切线与渐近线所成三角形的面积是常数. 利用圆规直尺可以作一等腰三角形 OAB，使它的面积与 ξ 和渐近线所成三角形的面积相等，AB 也是双曲线的切线，且线段 AB 的中点 C 是 AB 上切点，OC 是双曲线的实轴，C 是双曲线的顶点. 双曲线的焦点可利用双曲线的顶点与渐近线作出，双曲线的实半轴与虚半轴

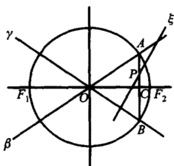


图 4－5－9

长分别为 $a=|OC|$，$b=|AC|$，则焦点 F_1，F_2 和中心 O 的距离都是 $\sqrt{a^2+b^2}$.

最后讨论椭圆的有关作法.

性质 4.5.10 如果已知椭圆 Γ 的切线 ξ,η,ζ，P,Q 分别是 ξ,ζ 上切点，则可作出此椭圆的对称轴，顶点与焦点.

证 二次曲线是椭圆，点 R 在区域Ⅱ内，先作它的两条对称轴. 作法如下，

作过 A 平行于 ζ 的直线交 PQ 于 X，由假设直线 BX 与 ξ 有交点，记为 Y. 过 Y 作 ζ 的平行线 ζ'；对六边形 $\zeta\zeta\eta\xi\xi\zeta'$ 应用 Brianchon 定理，可知 ζ' 是二次曲线的切线. 同理可作出 ξ 的平行切线 ξ'. 由 ξ,ξ',ζ,ζ' 构成的平行四边形的对角线是二次曲线 Γ 的一对共轭直径，它们的交点是二次曲线的中心 O，见图 4－5－10. 可以作出线束 O 的另一对共轭直线，线束 O 由共轭直线对决定一个对合. 由§4.4 习题 9，可以作出线束 O 的对合的两条互相垂直的对应直线，此两直线就是二次曲线 Γ 的对称轴.

已知椭圆的对称轴及一条切线以及该切线上的切点，则可作出此椭圆的顶点与焦点. 设 α,β 是所作 Γ 的两条对称轴，切线 ξ 与 α 的交点是 E，从 ξ 上切点 P 向 α 作垂线，垂足为 F，E 的极线

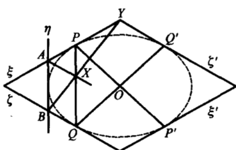


图 4-5-10

是PF.E,F;O,P_∞是 α 上的两对共轭点,P_∞是 α 上的无穷远点.可以用性质 4.5.8 中的方法作出 α 与椭圆的交点,但作图时以 FP_∞为直径作半圆应该用与 α 垂直的直线 PF 代替.如图 4-5-11,以 EO 为直径的半圆交 PF 于 Z,$\angle EZF$ 的内外角平分线与 α 分别交于 U,V.对称轴 α 与椭圆的交点就是 U,V.类似可作出 β 与椭圆的交点,此四点就是椭圆 Γ 的顶点.椭圆的焦点可以利用顶点作出.

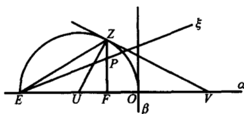


图 4-5-11

第五章
平面双曲几何

这一章采用 Klein 模型介绍双曲几何，把射影平面上一条非退化二次曲线内部的点所成的集合作为双曲平面，利用交比定义两点之间的双曲距离及直线之间的夹角. 双曲几何与欧氏平面几何一样都是度量几何，两者有许多相似之处，也有许多不同的地方. 在研究双曲几何时我们突出了双曲变换的作用，经常利用双曲变换简化讨论. 这一章我们还讨论了双曲平面上弧长与面积的计算.

§5.1 双曲平面

5.1.1 几何原本与非欧几何的发现

几何的发展经历了许多重要阶段，19 世纪初非欧几何的发现是具有革命性的，它不仅对几何本身，而且对其他学科的发展也有重要的影响. 了解一点非欧几何，认识各种几何之间的内在联系，对于开拓视野，培养数学修养，对于以后的学习研究都很有好处.

我们知道，古代几何是人类在生产实践活动中产生和总结出来的. 我国现存的最古老的数学文献是《周髀算经》，传说是商周时代遗留下来的，其中记载了一些几何知识. 例如，"经一周三"，这就是说："如果圆周的直径为一，则周长为三"；还有"勾三股四弦五"，即："如果直角三角形的两条直角边的长分别为三和四，则斜边之长为五". 目前，从地下发掘出来的文物中最古老的数学文献之一

是 1858 年英国人 A. H. Rind 从埃及的一个金字塔中发现的一份数学纸草卷. 它是公元前 1650 年的遗物,上面记载了 85 个数学问题,其中有一些是属于几何的. 这两份材料都是采用一问一答的叙述方法,书中只有答案,没有叙述如何证明. 数学史家认为:无论古埃及还是我国的商周时代,当时的人类大概还没有发展到论证的水平.

根据历史的记载,几何论证大约开始于公元前 7 世纪,古希腊时代,相当于我国的春秋时期. 在几何论证的先驱者中,著名的有 Pythagoras,他培养了一批学生并且组成了一个学术团体,他们系统地整理了前人的几何知识. Euclid 是公元前 3 世纪人(大约公元前 330—前 275 年),他给学生讲授几何学,后来把讲稿整理成一本书,叫做《几何原本》(《Elements》),以下常常简称为《原本》,这本书的出现是数学史上的重大事件之一.《原本》全书共十三卷,其中第五,七,八,九,十各卷是用几何方法叙述算术和比例理论,其余各卷是纯几何的. 前四卷讨论直线形和圆的理论,第六卷是相似形,最后三卷是立体几何部分. Euclid 从柏拉图学派那里受到严格的逻辑思维训练. 他创造性地把前人的几何知识在一个逻辑框架中系统地总结起来,这就是公理化思想的开始.

在明朝末年由利玛窦口译,徐光启执笔,合作翻译了 Euclid 的《几何原本》前 6 卷,1607 年在北京雕版刊行.《几何原本》从此传入我国,几何这一术语也因而沿用至今. 徐光启通过翻译,领悟到这部巨著的重大意义,他给此书以很高的评价:"此书为益,能令学理者祛其浮气,练其精心,学事者资其定法,发其巧思,故举世无一人不当学". 一针见血地道出了《原本》在科学思维方面给人以系统训练的巨大作用. 1857 年,《几何原本》后 9 卷由清代李善兰翻译刊出(中译本《几何原本》分 15 卷).

Euclid 的《几何原本》的基础结构是定义(点,线,面,角等),公设,公理(一般逻辑的概念),其中著名的 Euclid 的五个公设是:

(i) 任两点决定一条直线;

（ⅱ）一有限线段可以无限延长；

（ⅲ）存在以任意点为中心，任意长为半径的圆；

（ⅳ）凡是直角都相等；

（ⅴ）平面上两直线被一直线所截，若截线一侧的内角之和小于 π，则此两直线必相交于截线的这一侧．

Euclid 的公设实际上就是通常所说的公理，第五公设也称为第五公理．欧氏平面上不相交直线叫平行线，人们早就知道第五公设等价于：

过直线外一点有且只有一条平行线．

它称为平行公理，因此第五公设也称为平行公理．

从这些公设出发，Euclid 证明了 465 条命题，包含了那个时代的几乎所有几何成果．两千多年来《几何原本》成为传播几何知识的标准范本，人们把这种大家熟悉的几何称为欧氏几何．现在中学教的平面几何基本上还是《原本》的体系．Euclid 整理几何的方法——公理法也已成为研究数学的基本方法之一，它对数学的发展影响深远．

从公元前 330 年到 1800 年，人们始终坚信，欧氏几何是物理空间的正确理想化．但在 2000 多年的时间里，数学家始终对一件事耿耿于心，Euclid 所用的公理（公设）应该是不证自明的真理，而 Euclid 的第五公理比其他公理复杂，它的叙述方式更像一个定理．即使 Euclid 自己显然也不喜欢他对平行公理的那种说法，因为他只是在证完无需用平行公理的所有定理后才使用它．非欧几何的历史开始于对平行公理的研究．长期以来对这个问题的研究有两种途径，一种是试图用更为简明的命题代替平行公理，另一种是试图从其他公理推导出平行公理．有许多人都曾声称他们已经证明了平行公理，但是到后来总是被其他人找出破绽．研究 Euclid 的第五公理的人如此之多，又是如此的徒劳无功，使得 1759 年 d'Alembert 把平行公理问题称为“几何原理中的家丑”．研究发现第五公理有许多等价的命题，下面是其中著名的一些：

(1) 过直线外一点有且只有一条平行线;

(2) 三角形的三内角和等于 π;

(3) 对任何图形存在任意大小的相似图形;

(4) 在直线的同一侧与之距离相等的点的轨迹是直线且与之平行.

下面我们对第五公理及它们的等价命题进行一些分析讨论,先证明

引理 5.1.1 如果 Euclid 的五个公设中的前四个成立,则三角形的任一外角大于其他两个内角中的任一个.

证 用反证法,设 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ABD \leqslant \angle BAC$.

(1) 如图 5-1-1(a),若 $\angle ABD = \angle BAC$,取 D 使线段 $DB = AC$,则 $\triangle DBA$ 与 $\triangle CAB$ 全等. 这就有 $\angle DAB + \angle BAC = \angle ABC + \angle BAC = \pi$,所以点 D 在直线 AC 上,与"两点决定一条直线"矛盾.

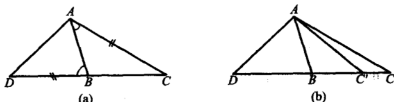


图 5-1-1

(2) 如图 5-1-1(b),如果 $\angle ABD < \angle BAC$,则可以在线段 BC 内找到一点 C' 使 $\angle ABD = \angle BAC'$. 显然直线 AC' 与 DC' 是不同的直线,(1) 证明了这不可能.

定理 5.1.2 第五公理成立的充要条件是平行公理成立.

证 如果第五公理成立,则过直线外一点至多只有一条平行线. 如图 5-1-2(a),设 A 是直线 BD 外一点,过 A 作直线 AC 使 $\angle CAB + \angle ABD = \pi$. 如果 AC 与 BD 相交,不妨设交点是 $C = D$,则 $\angle EAC = \angle ABD$,与引理 5.1.1 矛盾. 所以从第五公理可得平

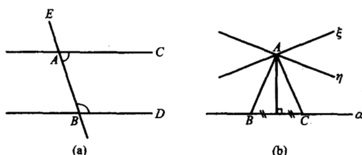


图 5-1-2

行公理.

反之,假设平行公理成立,设两直线被一直线所截,截线一侧的内角之和小于两直角,而此两直线不相交.如图 5-1-2(b),利用对称性可以得到过直线外一点的两条平行线,与平行公理矛盾.

如果第五公理成立,从这一定理的证明可知,如果平面上两平行的直线被一直线所截,则截线任一侧的内角之和等于 π.

下面我们证明第五公理与(2)等价.

定理 5.1.3 第五公理成立的充要条件是任一个三角形的三内角和等于 π.

证 假设第五公理成立.如图 5-1-3(a),设 $\triangle ABC$,由第五公理及定理 5.1.2,过 A 可作 BC 的平行线 AD,这时 $\angle DAB+\angle ABC=\pi$, $\angle DAC+\angle ACE=\pi$. 从 $\angle ACB+\angle ACE=\pi$ 及 $\angle DAC+\angle ACE=\pi$ 可得 $\angle DAC=\angle ACB$,由此得 $\triangle ABC$ 的三内角和等于 π.

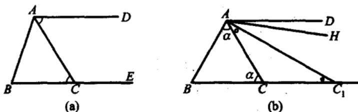


图 5-1-3

反之,我们假设任一三角形的三内角和等于 π. 设点 A 是过 B,C 的直线外一点,过 A 作直线 AD 使 $\angle DAC=\angle ACB$,如果直线 AD 与 BC 相交,则不论交点在直线 BC 的那一边,交点与 A,C 成三角形的三内角和都大于 π. 这证明 AD 与 BC 平行. 下面证明过 A 的平行线只有一条. 如图 5-1-3(b),取直线 BC 上点 $B,C,C_1,\cdots$,使 $AB=BC,AC=CC_1,\cdots$. 由于 $AB=BC$,可设 $\angle BAC=\angle ACB=\alpha$,从三角形的三内角和等于 π. 可得 $\angle CAC_1=\frac{1}{2}\alpha,\cdots$. 把这些角加起来得

$$\alpha+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2^2}\alpha+\cdots=2\alpha.$$

另一方面 $\angle BAD=2\alpha$,如果 AH 是过 A 的任一不与 AD 重合的直线,那么必有

$$\angle HAB+\angle ABC>\pi \text{ 或 } \angle HAB+\angle ABC<\pi.$$

则 $\angle BAH>2\alpha$ 或 $\angle BAH<2\alpha$,从上面证明可知 AH 必与 BC 相交,所以过 A 只有一条平行线.

两千多年来,许多人都试图证明欧氏第五公设,但是都没有成功,直到 19 世纪初问题才从相反的方向得到解决. 俄国的 Lobachevsky(1792—1856),匈牙利的 J. Bolyai(1802—1860),德国的 Gauss(1777—1855)等人几乎同时得出一种非欧几何,他们证明了:如果否定第五公设,则存在另一种几何,它与欧氏几何不同,而其中没有任何矛盾. 也就是说,对平行公理的研究导致了新几何的发现,新几何满足 Euclid 的前面四个公设,而不满足第五公设. 一般称为双曲几何或者 Lobachevsky 几何.

Bolyai 系匈牙利军官,他称非欧几何为绝对几何,写了一篇 26 页的论文《绝对空间的科学》,作为附录发表在其父的一本书后(1832 年). Lobachevsky 在一系列的论文中给出了他对非欧几何的研究,而 Gauss 在他的日记,笔记以及与朋友的通信中记录了他对非欧几何的研究,生前没有发表他对非欧几何的研究. 他们研究

非欧几何的方法都是采用逻辑推理，即公理法，他们证明了非欧几何的许多定理．尽管非欧几何的诞生是自古希腊时代以来数学中一个重大的革新，它改变了人们对数学的看法也改变了人们研究数学的方法，但那是后来的事情．由于非欧几何的许多定理都和我们的习惯观念相冲突，也部分由于 Gauss 是当时公认的伟大的数学家，而 Gauss 生前没有发表这些研究，以及其他原因，这个工作以及对它的意义的全面认识都被推迟了大约 30 年．当 Gauss 关于非欧几何的研究通信与注记在他去世之后出版时，人们的注意力才引向这一课题．以后的发展与研究使数学家们认识到非欧几何的意义．非欧几何使人们认识到欧氏几何并非必然是物质空间的几何．我们知道，非欧几何的一种形式已经被 Einstein 用于研究时空的相对论，寻找反映物质空间的几何的研究直到今天还在继续．

双曲几何和欧氏几何一样，很多定理的证明可以不依赖于平行公理，这样的定理在双曲几何也成立．例如引理 5.1.1 没有用到 Euclid 的第五公设，所以在双曲平面上也有：三角形的任一外角大于其他两个内角中的任一个．因为在双曲平面上平行公理不成立，它的等价命题也不成立．故在双曲平面上没有相似图形；在直线的同一侧与之距离相等的点的轨迹不再是直线；三角形的三内角和不再等于 π．

1868 年，意大利数学家 Beltrami（1835—1899）在一篇文章中证明了双曲几何可以局部实现于普通的欧氏空间里，作为下面曲面上的几何学

$$\vec{r}(u,v)=\{\sin u\cos v,\sin u\sin v,\ln\tan\frac{u}{2}+\cos u\}.$$

这一曲面是由 xOy 平面上的曳物线绕 z 轴旋转得到，它是 Gauss 曲率等于 -1 的曲面，叫伪球面（图 5－1－4）．在这一局部模型上，双曲几何的直线段对应曲面上的测地线（曲面上的连接两点的最短曲线）．在 19 世纪初，射影几何也发展起来了，到 19 世纪末，Cayley 和 Klein 的研究发现，可以从射影几何给出欧氏几何与双

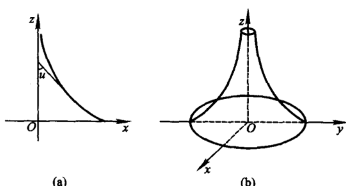


图 5-1-4

曲几何的模型,这些进展使得双曲几何得到世人的承认.在这之后,几何又有了许多重要的发展,各种几何,特别是微分流形上几何的研究,拓扑的研究都日趋活跃.

由于时代的局限,Euclid 的《几何原本》的公理法体系不是很严格的.在发现非欧几何几十年之后,这一工作由德国数学家 Hilbert(1862—1943)的名著《几何基础》(1899 年)最终完成.Hilbert 的欧氏几何公理体系由(ⅰ)结合公理(共 8 条);(ⅱ)顺序公理(共 4 条);(ⅲ)合同公理(共 5 条);(ⅳ)平行公理(1 条);(ⅴ)连续公理(共 2 条)组成.Hilbert 还证明了它们作为公理体系必需满足的相容性,独立性,完备性.从而证明了平行公理与其他公理是独立的,它不能作为定理从其他公理推出,改变平行公理可以得到非欧几何的公理体系.

5.1.2 双曲平面的 Klein 模型

我们已经知道,如果把射影平面上某一条直线作为无穷远直线,可得到仿射平面.进一步在仿射平面上适当地定义两点之间的距离与直线的夹角就得到欧氏平面.下面取定射影平面上一条实的非退化的二次曲线 K,K 把射影平面上的点分成三部分:K 上点;K 内部的点(无切线点);K 外部的点(二切线点).适当选择射

影坐标，K 的方程可写成：

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0.$$

采用点的非齐次坐标 $x=\frac{x_1}{x_3}, y=\frac{x_2}{x_3}$，则 $K: x^2+y^2=1$ 也可以看成欧氏平面 E^2 上的单位圆.

定义 5.1.1 （ⅰ）K 内部的点所成集合 $H^2=\{(x,y)\in E^2 \mid x^2+y^2<1\}$ 称为双曲平面，其上的点是双曲平面上点，二次曲线 K 上点称为理想点或无穷远点，K 叫做双曲平面的绝对形；

（ⅱ）绝对形 K 的每一条弦（即射影平面上直线在 K 内部分）是双曲平面上的直线，点与直线的结合关系是通常的结合关系；

（ⅲ）如果双曲平面上两直线在 H^2 上不相交，称它们平行；如果它们交于绝对形，则称它们是一对极限平行线.

$P(x_1,x_2,x_3)$ 是双曲平面上点的充要条件是 $x_1^2+x_2^2-x_3^2<0$. 根据定义，双曲平面上任一直线与绝对形有两个交点，因此任一双曲直线上有两个无穷远点. 双曲直线上任意两点决定一双曲线段，A,B 决定的线段有时也记为 AB. 由定义，平行关系是相互的，即如果直线 ξ 与 η 平行，则 η 与 ξ 也平行. ξ 与 η 是极限平行的充要条件是 ξ 与 η 的交点在绝对形 K 上. 为了叙述方便，我们把 K 外部的点称为超理想点.

由定义立即可得（见图 5-1-5）

性质 5.1.4 过双曲平面上直线外一点可作无数条平行线，其中有两条是它的极限平行线.

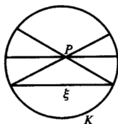


图 5-1-5

例 1 $\xi: \xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0$，即 $\xi_1x+\xi_2y+\xi_3=0$，是双曲平面上直线的充要条件是 $\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2>0$.

证 将 ξ 看作欧氏平面上直线，K 的圆心 $O(0,0)$ 到直线 ξ 的（欧氏）距离是

$$\frac{|\xi_3|}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}.$$

因此 ξ 是 H^2 上直线的充要条件是 $|\xi_3|<\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$.

这样定义的双曲平面是双曲几何的一个模型，称为 **Klein** 模型.双曲几何也可以用公理法定义并讨论，这里的讨论主要在 Klein 模型上进行.

5.1.3 双曲度量

下面定义双曲平面上点之间的距离以及直线之间的夹角，它们都可以用交比定义.

1° 双曲距离

设 A,B 是 H^2 上两点，直线 AB 交绝对形 K 于 P_1,P_2，四点 A,B,P_1,P_2 的顺序如图 5-1-6，这样的顺序使交比

$$R(AB,P_1P_2)=\frac{AP_1}{BP_1}\cdot\frac{BP_2}{AP_2}\geqslant 1,$$

这里 $\frac{AP_1}{BP_1}\cdot\frac{BP_2}{AP_2}$ 是利用欧氏距离计算交比.

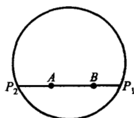


图 5-1-6

定义 5.1.2 两点 A,B 的**双曲距离**是

$$d(A,B)=\frac{1}{2}\ln R(AB,P_1P_2).$$

注 如果把两点距离定义为

$$d(A,B)=\frac{\rho}{2}\ln R(AB,P_1P_2),$$

$\rho>0$ 是常数，以后的讨论一样进行，ρ 称为**双曲半径**.采用不同的 ρ 对于双曲几何的研究没有实质的不同.

性质 5.1.5 (i) $d(A,B)\geqslant 0$，且 $d(A,B)=0$ 的充要条件是 $A=B$；

(ii) $d(A,B)=d(B,A)$；

（ⅲ）如果 A,B,C 是双曲平面上任意三点，则

$$d(A,C)+d(C,B)\geqslant d(A,B),$$

等式成立的充要条件是 A,B,C 共线，且 C 在 A,B 之间.

证 由 $R(AB,P_1P_2)\geqslant 1$ 知 $d(A,B)=\frac{1}{2}\ln R(AB,P_1P_2)\geqslant 0$，等式成立的充要条件是 $\frac{AP_1}{BP_1}\cdot\frac{BP_2}{AP_2}=1$，这时 A,B,P_1,P_2 中有两点重合. 由于 P_1,P_2 是无穷远点，$d(A,B)=0$ 的充要条件是 $A=B$，这证明了（ⅰ）.

（ⅱ）
$$d(A,B)=\frac{1}{2}\ln R(AB,P_1P_2)=\frac{1}{2}\ln R(BA,P_2P_1)=d(B,A).$$

（ⅲ）设 A,B,C 是 H^2 上不共线三点，如图 5-1-7，设 AB 交 K 于 P_1,P_2，AC 交 K 于 Q_1,Q_2，CB 交 K 于 R_1,R_2. 记 $A'=AB\times R_2Q_2$，$B'=AB\times R_1Q_1$，$S=R_1Q_1\times R_2Q_2$，$D=SC\times AB$. 于是

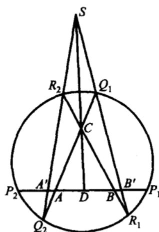


图 5-1-7

$$R(CB,R_1R_2)=R(DB,B'A')=\frac{DB'}{BB'}\cdot\frac{BA'}{DA'}\geqslant\frac{DP_1}{BP_1}\cdot\frac{BP_2}{DP_2}=R(DB,P_1P_2),$$

等式成立，则必有 $B'=P_1$，$A'=P_2$，这与 A,B,C 不共线矛盾. 同理

$$R(AC,Q_1Q_2)=R(AD,B'A')>R(AD,P_1P_2).$$

所以

$$R(CB,R_1R_2)R(AC,Q_1Q_2)>R(DB,P_1P_2)R(AD,P_1P_2)=R(AB,P_1P_2),$$

两边取对数，证明了对于不共线的三点 A,B,C

$$d(A,C)+d(C,B)>d(A,B).$$

如果 C 是线段 AB 上一点，由

$$R(AB,P_1P_2)=R(AC,P_1P_2)R(CB,P_1P_2)$$

得到

$$d(A,C)+d(C,B)=d(A,B).$$

也就是说，A,B 之间的双曲距离等于线段 AB 上任一点与 A,B 的距离之和.

性质 5.1.5 中三个条件也是任何距离必须满足的条件，其中(iii)叫距离的三角不等式.(iii) 也说明双曲平面上的两点之间的线段实现两点的双曲距离，如果 A,B 是双曲平面上两点，我们也称 $d(A,B)$是双曲线段 AB 的长.

如果不考虑 A,B,P_1,P_2 的顺序，则有

$$d(A,B)=\frac{1}{2}|\ln R(AB,P_1P_2)|.$$

性质 5.1.6 $\lim\limits_{B\to P_1} d(A,B)=+\infty$，因此双曲直线与欧氏直线一样也是无限长的.

证 这是因为 $\lim\limits_{B\to P_1} R(AB,P_1P_2)=\lim\limits_{B\to P_1}\frac{AP_1}{BP_1}\cdot\frac{BP_2}{AP_2}=+\infty$，所以 $\lim\limits_{B\to P_1} d(A,B)=+\infty$.

性质 5.1.6 说明了双曲平面上可以有任意长的线段，任一线段也可无限延长；绝对形 K 上的点在双曲距离的意义下也是无穷远点.

例 2 设 $P_1,P_2\in K$，A 是 P_1P_2 的欧氏中点，B 是 P_1P_2 上另一点，$B\in H^2$. 设 P_1P_2 的欧氏长度是 $2l$，AB 的欧氏长度是 d_0，则

$$d_0=l\,\mathrm{th}\,d(A,B).$$

证 从

$$R(AB,P_1P_2)=\frac{AP_1}{BP_1}\cdot\frac{BP_2}{AP_2}=\frac{l}{l-d_0}\cdot\frac{l+d_0}{l}=\frac{l+d_0}{l-d_0},$$

可得 $d(A,B)=\frac{1}{2}\ln\frac{l+d_0}{l-d_0}$，即 $e^{2d(A,B)}=\frac{l+d_0}{l-d_0}$，所以

$$d_0=\frac{l(e^{2d(A,B)}-1)}{e^{2d(A,B)}+1}=l\,\text{th}\,d(A,B).$$

如果 A 是绝对形的中心，则 $l=1$，这时 $d_0=\text{th}\,d(A,B)$. 利用函数 $f(t)=\text{th}\,t-t$，$\frac{df}{dt}=\frac{1}{\text{ch}^2 t}-1<0$，知道 $d_0=\text{th}\,d(A,B)<d(A,B)$，$A\neq B$. 也就是说，这时 A,B 的欧氏距离总小于双曲距离.

下面的性质给出双曲距离的坐标表示式

性质 5.1.7 在欧氏坐标下，两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 的双曲距离 d 满足

$$\text{ch}d=\frac{1-x_1x_2-y_1y_2}{\sqrt{1-x_1^2-y_1^2}\cdot\sqrt{1-x_2^2-y_2^2}}.$$

证 在齐次坐标下，A,B 用 $a=(x_1,y_1,1)$，$b=(x_2,y_2,1)$ 表示，直线 AB 上其他点可表示为 $a+\lambda b$，代入 K 的方程整理得：

$$\lambda^2L^2+2\lambda H+G^2=0,$$

其中 $G^2=1-x_1^2-y_1^2$，$H=1-x_1x_2-y_1y_2$，$L^2=1-x_2^2-y_2^2$，此三数均大于 0，由于 AB 与 K 有两个实交点，故有

$$\Delta=H^2-L^2G^2>0.$$

直线 AB 上两理想点由下两数决定：

$$\lambda_1=\frac{-H-\sqrt{H^2-L^2G^2}}{L^2},\lambda_2=\frac{-H+\sqrt{H^2-L^2G^2}}{L^2},$$

所以

$$R(AB,P_1P_2)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{H+\sqrt{H^2-L^2G^2}}{H-\sqrt{H^2-L^2G^2}}=\frac{1+\sqrt{1-\sigma^2}}{1-\sqrt{1-\sigma^2}},$$

其中 $\sigma=\frac{LG}{H}$. 因此

$$d = d(A,B) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-\sigma^2}}{1-\sqrt{1-\sigma^2}} = \ln\frac{1+\sqrt{1-\sigma^2}}{\sigma},$$

$$e^d = \frac{1+\sqrt{1-\sigma^2}}{\sigma}, e^{-d} = \frac{1-\sqrt{1-\sigma^2}}{\sigma},$$

$$\mathrm{ch}d = \frac{e^d + e^d}{2} = \frac{1}{\sigma} = \frac{1 - x_1x_2 - y_1y_2}{\sqrt{1-x_1^2-y_1^2}\cdot\sqrt{1-x_2^2-y_2^2}}.$$

由于 $\mathrm{ch}d \geqslant 1$，这也证明了对任意 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_1^2+y_1^2<1$，$x_2^2+y_2^2<1$，

$$1 - x_1x_2 - y_1y_2 \geqslant \sqrt{1-x_1^2-y_1^2}\cdot\sqrt{1-x_2^2-y_2^2}.$$

例 3 设 $A(0,\lambda), B(\mu,0), O(0,0) \in H^2, 0<\lambda,\mu<1$，记

$$\alpha = d(O,B), \beta = d(O,A), \gamma = d(A,B).$$

由性质 5.1.7，$\mathrm{ch}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}$，$\mathrm{ch}\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}$，$\mathrm{ch}\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}\cdot\sqrt{1-\mu^2}}$. 因此 $\mathrm{ch}\alpha\cdot\mathrm{ch}\beta = \mathrm{ch}\gamma$. 根据下面的定义，$OA$ 垂直于 OB，O, A, B 构成双曲直角三角形，$\mathrm{ch}\alpha\cdot\mathrm{ch}\,\beta = \mathrm{ch}\gamma$ 叫作此直角三角形的勾股定理(图 5－1－8).

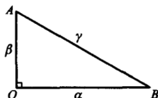


图 5－1－8

2° 双曲角度

定义 5.1.3 设 $\xi(\xi_1,\xi_2,\xi_3), \eta(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 是双曲平面上两相交直线，它们的交角 $\angle(\xi,\eta)$ 由下式给出

$$\angle(\xi,\eta) = \arccos\frac{|\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 - \xi_3\eta_3|}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2}\cdot\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2-\eta_3^2}}.$$

这样定义的双曲角度是 ξ 与 η 所成交角中较小的一个. 利用下面的性质，我们可判断两交角的大小.

性质 5.1.8 双曲平面上两直线垂直的充要条件是它们关于绝对形 K 共轭.

这是因为，由定义 ξ 与 η 垂直的条件是 $\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 - \xi_3\eta_3 =$

0,这也是 ξ 与 η 共轭的条件.可以证明,双曲平面上两直线如果关于 K 共轭,它们在双曲平面上一定相交.

如图 5-1-9,设交于点 A 的两直线 ξ 与 η 成两角 θ_1,θ_2,设 ξ 关于绝对形 K 的极点是 Z,则 AZ 是 ξ 的共轭直线,ξ 与 AZ 在双曲平面上垂直.以后我们要证明一点处的双曲角度具有可加性,且平角为 π.因此 $\theta_1+\theta_2=\pi$,据此可以比较两双曲角的大小,图 5-1-9情况,$\theta_1<\theta_2$.

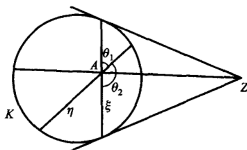


图 5-1-9

性质 5.1.9 (ⅰ)顶点在绝对形中心 O 的双曲角度与欧氏角度相同;

(ⅱ)当两直线中有一条过中心 O 时,它们双曲垂直的充要条件是它们欧氏垂直.

证 设 $\xi(\xi_1,\xi_2,0)$,$\eta(\eta_1,\eta_2,0)$是过中心 O 的两直线,则

$$\angle(\xi,\eta)=\arccos\frac{|\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2|}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\cdot\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}}.$$

显然这也是 ξ 与 η 的欧氏角度.

(ⅱ)直线 ξ 与 η 双曲垂直的充要条件是 $\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2-\xi_3\eta_3=0$,当 ξ,η 中有一条过中心时,它成为 $\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2=0$,这也是 ξ,η 欧氏垂直的条件.

要注意的是,双曲平面上只有相交直线才有交角,而平行直线(非极限平行线)无交角可言(见习题 4),这也是双曲平面与欧氏

平面的不同之处.

例 4 设 $A(0,\lambda)$, $B(\mu,0)$, $O(0,0)$是例 3 中双曲平面上三点.双曲△ABO 的三边的方程分别是

$$OA: x=0,\ OB: y=0,\ AB: \lambda x+\mu y-\lambda\mu=0.$$

因此△ABO 的三内角的双曲角度分别是

$$\angle AOB=\frac{\pi}{2},\ \angle OAB=\arccos\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2-\lambda^2\mu^2}},$$

$$\angle OBA=\arccos\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2-\lambda^2\mu^2}}.$$

它们的欧氏角度分别是

$$\frac{\pi}{2},\ \arccos\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}},\ \arccos\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}.$$

显然

$$\arccos\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2-\lambda^2\mu^2}}<\arccos\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}},$$

$$\arccos\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2-\lambda^2\mu^2}}<\arccos\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}.$$

这证明了,△ABO 的三内角的双曲角度之和小于它的欧氏角度之和,所以双曲△ABO 的三内角之和小于 π. 在 §5.3,我们将证明任一双曲三角形的三内角之和小于 π. 当 $\lambda\to1$ 时,A 趋于无穷远点,这时 OA 与 BA 趋于一对极限平行线,

$$\lim_{\lambda\to1}\angle OAB=\lim_{\lambda\to1}\arccos\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2-\lambda^2\mu^2}}=0.$$

习题 5.1

1. 验证双曲函数的下列公式

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1,\ 1-\operatorname{th}^2x=\operatorname{sch}^2x=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x},$$

$$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y,\ \operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y.$$

2. 设 $\xi: 2x+1=0$ 与 $\eta: ax+y+1=0$(a 为参数)是双曲平面上两直线,

a 是参数.对于下列各情况,分别求参数 a 满足的条件:

(1) ξ,η 是 H^2 的平行线;(2) ξ,η 是极限平行线;(3) ξ,η 是相交直线.

3. 设 $A(0,0)$, $B\left(0,\frac{1}{2}\right)$是双曲平面上的点:

(1) 计算 $d(A,B)$;(2) 找出线段 AB 的双曲中点 C.

4. 验证直线 $\xi: x+\frac{1}{2}=0$ 与 $\eta: x+y-1=0$ 是双曲平面上平行线,但不是极限平行线,如果用计算双曲角度的公式计算 ξ 与 η 的夹角会出现什么情况?

5. 在双曲平面上,试求过点 $A\left(\frac{1}{2},0\right)$关于直线 $y=-\frac{1}{2}$ 的垂线,并求点 A 到直线 $y=-\frac{1}{2}$的距离.

6. 双曲平行四边形的对边相等吗?

7. 设 $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $C\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $O(0,0)$是双曲平面上的点,

(1) 验证 A,B,C 共线,但三线段 OA,OB,OC 的双曲中点不共线;

(2) 证明结论"三角形任意二边中点的连线等于第三边的一半"在双曲几何中不成立.

8. 证明双曲平面上一定直线的所有垂线互为平行线,但不是极限平行线.

9. 设 $A\left(-\frac{1}{2},a\right)$, $A'\left(\frac{1}{2},a\right)$是双曲平面上两点,设它们双曲距离为 d,计算 $\operatorname{ch} d$ 及 $\lim\limits_{a\to\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{ch} d$,并说明它们的几何意义.

§5.2 双曲运动

设 $\varphi: \rho x'=Ax$ 是射影平面上的直射,如果 φ 把绝对形 $K: x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ 变成自身,则 φ 把 K 内部的点(无切线点)变成内部的点.这样的直射诱导双曲平面上的一个一一变换,称为 H^2 上的**双曲变换或者双曲运动**.

我们来推导 φ 是双曲运动的条件.把绝对形 K 的方程表示成

$$x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}x=0.$$

直射 φ 把这一方程变为 $x'^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}A^{-1}x'=0$,因此 φ 是双曲运动的充要条件是存在非零常数 τ 使

$$A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}A=\tau\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

两边取行列式可知 $\tau>0$.在等式两边取逆矩阵可证明

$$A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}A^{\mathrm{T}}=\tau\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

如果 $A=(a_{ij})$,则 $\rho x'=Ax$ 是双曲运动的充要条件是

$$a_{11}^2+a_{21}^2-a_{31}^2=\tau,$$
$$a_{12}^2+a_{22}^2-a_{32}^2=\tau,$$
$$a_{13}^2+a_{23}^2-a_{33}^2=-\tau,$$
$$a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}-a_{3i}a_{3j}=0,\ 1\leqslant i,j\leqslant 3,i\neq j.$$

从双曲运动的定义容易得到

定理 5.2.1 H^2 上所有双曲运动的集合构成群,称为*双曲运动群*,它是直射变换群的子群.

显然,§5.1 中定义的双曲平面上的直线及直线的平行等概念都是在双曲运动下不变的,类似这样在双曲运动下不变的性质,称为*双曲性质*,对应的几何叫*双曲几何*.对于双曲平面上两图形 M 与 M',如果存在双曲运动把 M 变成 M',则称 M 与 M' 在双曲

几何里是全等的(合同的).

定理 5.2.2 双曲距离,角度都是双曲运动下的不变量.

证 由于双曲距离是利用交比定义的,双曲运动把 K 上的点变成 K 上的点且保持交比,双曲距离在双曲运动下不变.双曲角度的不变性可以利用交角计算公式验证.由 §2.3,直射 $\varphi:\rho x'=Ax$ 决定的射影平面上的直线到直线的变换表示式是 $\rho\xi'=(A^{-1})^{\mathrm{T}}\xi$.如果 φ 是双曲运动,则

$$A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}A=\tau\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

设 $\xi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$,$\eta(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$是双曲平面上两相交直线,$\xi'=\varphi(\xi)$,$\eta'=\varphi(\xi)$,坐标下,$\rho_1\xi'=(A^{-1})^{\mathrm{T}}\xi$,$\rho_2\eta'=(A^{-1})^{\mathrm{T}}\eta$,不妨设 $\rho_1=\rho_2=1$.所以

$$\xi_1'\eta_1'+\xi_2'\eta_2'-\xi_3'\eta_3'=(\xi_1',\xi_2',\xi_3')\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1'\\\eta_2'\\\eta_3'\end{pmatrix}$$

$$=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)A^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}(A^{-1})^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{pmatrix}$$

$$=\tau^{-1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{pmatrix},$$

类似可得

$$\xi'^2_1+\xi'^2_2-\xi'^2_3=\tau^{-1}(\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2),$$
$$\eta'^2_1+\eta'^2_2-\eta'^2_3=\tau^{-1}(\eta_1^2+\eta_2^2-\eta_3^2).$$

代入$\angle(\xi',\eta')$的交角公式即可证明$\angle(\xi',\eta')=\angle(\xi,\eta)$.

双曲距离与角度是基本的双曲不变量.如果存在双曲运动把

两个双曲三角形的一个变成另一个，由定理 5.2.2，这两个三角形的对应边与对应角都相等，利用双曲运动还可证明这两个三角形的角平分线，中线等也对应相等. 下面讨论几种具体的双曲变换.

如图 5-2-1，设双曲平面上直线 ξ 关于绝对形 K 的极点是 Z（Z 是超理想点），以 ξ 为轴，Z 为中心决定射影平面上一个调和同调变换 φ. 从 §2.3 知道，φ 是一个直射，它使得 Z 以及 ξ 上每一点不动，并且对射影平面上任一点 P，四点 $P,\varphi(P),Z,PZ\times\xi$ 是调和点列.

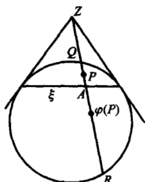


图 5-2-1

性质 5.2.3 这样的 φ 是双曲运动，它是双曲平面上以 ξ 为对称轴的反射.

证 如图 5-2-1，设 Q 是 K 上任一点，$Q\notin\xi$，R 是 ZQ 与 K 的另一个交点，$A=ZQ\times\xi$. 由于 Z 与 A 共轭，Z,A,Q,R 是调和点列，$\varphi(Q)=R$. 这证明了 φ 将 K 上点变成 K 上点，φ 是双曲运动. 设 P 是 H^2 上任一点，$P\notin\xi$，不妨设 P 就在 ZA 上，由于 QR 与 ξ 共轭，QR 与 ξ 是双曲垂直的，双曲运动保持两点的距离，$d(A,P)=d(A,\varphi(P))$，因此 $\varphi(P)$ 是点 P 在以直线 ξ 为轴的反射下的像. 这证明了 φ 是双曲运动，是以 ξ 为轴的反射.

推论 5.2.4 （ⅰ）双曲平面关于任一直线成反射对称；

（ⅱ）设 A,B 是双曲平面上任两点，则存在双曲变换把 A 变成 B.

证 （ⅱ）过 AB 的双曲中点作垂线 ξ，以 ξ 为轴的反射把 A 变成 B.

显然，绕绝对形中心的欧氏旋转也是直射，它也把绝对形变成自身，这种旋转也是双曲运动. 设 A 是 H^2 上任一点，θ 是一个常数，对于双曲平面上任一点 P，将 AP 绕 A 旋转 θ，旋转时保持 AP 的双曲长度不变，得 AP'. 如果 $\theta>0$，旋转是逆时针的；如果 $\theta<0$，旋转是顺时针的. 定义 $\psi(P)=P'$. 显然，ψ 是 H^2 上的一个映

射，称为双曲旋转.

性质 5.2.5 双曲旋转也是双曲运动.

证 双曲旋转可以分解成两个双曲反射. 设 ψ 是绕定点 A 旋转角是 θ 的双曲旋转，不妨设 $0<\theta\leqslant\pi$. 如图 5-2-2，设 ξ,η 是交于 A 的两直线，它们之间夹角为 $\frac{1}{2}\theta$. 以 φ_1,φ_2 分别表示关于 ξ,η 的反射. 不难证明，$\varphi_2\circ\varphi_1$ 是以 A 为中心，旋转角为 θ 的旋转；而 $\varphi_1\circ\varphi_2$ 是以 A 为中心，旋转角为 $-\theta$ 的旋转.

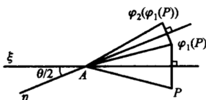


图 5-2-2

利用双曲运动可以简化双曲几何问题的证明，下面用它证明双曲角度也可用交比表示. 对于任意点 $P\in H^2$，如果过 P 的虚直线满足 K 的自共轭直线的方程，则称它是绝对形 K 的虚切线.

定理 5.2.6 设 τ_1,τ_2 是过 H^2 上两直线 ξ 与 η 的交点的虚切线，则

$$\angle(\xi,\eta)=\frac{1}{2}|\ln R(\xi\eta,\tau_1\tau_2)|.$$

证 由于交比与双曲角度都是双曲运动不变的，不妨设 ξ 与 η 的交点就是绝对形的中心 O，这时 ξ 与 η 的双曲角度与欧氏角度相同. 过原点 O 与圆点 $I(1,\mathrm{i},0)$，$J(1,-\mathrm{i},0)$ 的两条极小直线 $x_1+\mathrm{i}x_2=0$，$x_1-\mathrm{i}x_2=0$ 也是绝对形 K 的虚切线，切点分别是 I，J，由 Laguerre 定理，

$$\angle(\xi,\eta)=\frac{1}{2}|\ln R(\xi\eta,\tau_1\tau_2)|.$$

这一定理的证明也说明双曲角度与欧氏角度一样，具有可加性，即如果 B,D 在直线 AC 的两侧，则 $\angle BAC$ 与 $\angle CAD$ 的双曲角度之和等于 $\angle BAD$ 的双曲角度. 也证明了双曲几何中，平角也是 π.

例 1 设 φ 是 H^2 上一个双曲运动，如果 A 是 φ 的唯一的不动点，则 φ 是绕 A 的一个双曲旋转．

证 如图 5-2-3，设 A,B,C 是双曲平面上的共线三点，由于双曲变换是等距，$\varphi(A)=A,B'=\varphi(B),C'=\varphi(C)$ 也是共线三点，它们顺序关系与 A,B,C 相同．设射线 AC 与 $A'C'$ 的夹角为 $\theta, 0<\theta<\pi$．对于 AC 上任一点 P，$\varphi(P)$ 是 AC' 上一点．设 D 是双曲平面上任一点，D 不在直线 AC 上，A,B,D 构成三角形，记 $D'=\varphi(D)$，$AB'D'$ 是与 ABD 全等的三角形．如果 D' 在图 5-2-3(a)中所示位置，则 D' 也是由 D 绕 A 旋转 θ 得到；如果 D' 在图 5-2-3(b)所示位置，BB' 交 AD 于 E，交 AD' 于 E'，显然 $\varphi(E)=E'$．设 F 是 EE' 的双曲中点，一定有 $\varphi(F)=F$，这与 φ 只有一个不动点矛盾，图 5-2-3(b)情况不可能存在．对 $\theta=\pi$ 这些证明稍加修改仍然成立．

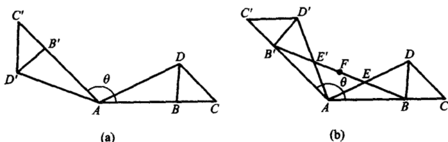


图 5-2-3

这一证明几乎可以原封不动地用来证明欧氏几何的如下命题：

设 φ 是欧氏平面上一个欧氏变换，如果 A 是 φ 的唯一的不动点，则 φ 是绕 A 的一个旋转．

例 2 试求由直线 $x=\frac{1}{2}$ 决定的双曲平面上的反射．

解 此例可以用§2.3的方法,下面采用交比来解.直线 $x=\frac{1}{2}$ 关于绝对形 K 的极点是 $Z(2,0,1)$.设 $P(x_1,x_2,x_3)$ 是射影平面内任一点.不难求得直线 ZP 与 $2x_1-x_3=0$ 的交点是 $Q(x_1-2x_3,-3x_2,2x_1-4x_3)$.设 $\rho p=\lambda z+\mu q$,解得 $\rho=3,\mu=-1$, $\lambda=2x_1-x_3$, $p'=\lambda z-\mu q=(5x_1-4x_3,-3x_2,4x_1-5x_3)$ 是 Z, Q, P 的第四调和点,这也是点 P 在 φ 下的像的坐标.因此双曲反射 φ 的表示式是

$$\rho\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&-4\\0&-3&0\\4&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

写成非齐次坐标形式是

$$\begin{cases}x'=\dfrac{5x-4}{4x-5},\\[2mm] y'=\dfrac{-3y}{4x-5}.\end{cases}$$

由于 $\varphi=\varphi^{-1}$,容易求出双曲平面上直线在此反射下的像.

习题 5.2

1. 设 A, B 是双曲平面上两点, A' 是直线 ξ' 上点,试证总存在双曲变换使 A 变成 A',点 B 变成 ξ' 上 A' 的指定一侧上点.

2. 设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是双曲平面上全等三角形(边角对应相等的三角形),证明存在双曲运动使三角形的一个变成另一个.

3. 在双曲平面上,设 ξ, η 是极限平行线, $E=\xi\times\eta$,设 A 是 ξ 上任一点,试证 A 到直线 η 的距离 x 随着 A 向 E 移动而减少,且移动时可取得一切正实数(一点到直线的距离以垂线为最短).

4. 求出双曲平面上关于 $y=\frac{1}{2}$ 的反射 ψ,并求出它与关于 $x=\frac{1}{2}$ 的反射 φ 的合成 $\varphi\psi$ 与 $\psi\varphi$,并求出 $\varphi\psi$ 的旋转角.

§5.3 双曲三角学

5.3.1 双曲三角学

双曲平面上任意不共线的三点确定三条线段，它们构成的图形叫做**双曲三角形**，三点是三角形的顶点，三线段是边，三线段两两所成角叫双曲三角形的内角．对于任意满足三角不等式的三正数，都存在双曲三角形使它的三边长分别等于此三正数．

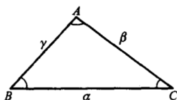


图 5-3-1

对于由三不共线点 A,B,C 构成的双曲$\triangle ABC$，以 α,β,γ 表示三边 BC,CA,AB 的长，A,B,C 表示它的内角．

定理 5.3.1 设$\triangle ABC$ 是双曲三角形，则有

（ⅰ）$\operatorname{ch}\alpha=\operatorname{ch}\beta\operatorname{ch}\gamma-\operatorname{sh}\beta\operatorname{sh}\gamma\cos A$，

（ⅱ）$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\operatorname{ch}\alpha$，

（ⅲ）$\dfrac{\sin A}{\operatorname{sh}\alpha}=\dfrac{\sin B}{\operatorname{sh}\beta}=\dfrac{\sin C}{\operatorname{sh}\gamma}$，

其中（ⅰ）与（ⅱ）分别称作双曲三角形的边与角的余弦定理，（ⅲ）称作双曲正弦定理．

证 先证（ⅰ）．由于双曲运动不改变长度与角度，不妨设 A 是绝对形的中心，这时 $A(0,0),B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$．利用性质 5.1.7 可得

$$\operatorname{ch}\alpha=\frac{1-x_1x_2-y_1y_2}{\sqrt{1-x_1^2-y_1^2}\cdot\sqrt{1-x_2^2-y_2^2}},$$

$$\operatorname{ch}\beta=\frac{1}{\sqrt{1-x_2^2-y_2^2}},\operatorname{ch}\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-y_1^2}}.$$

利用双曲角度的定义

$$\cos A = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

及 $x_1^2 + y_1^2 = \mathrm{th}^2\gamma$, $x_2^2 + y_2^2 = \mathrm{th}^2\beta$,得

$$x_1x_2 + y_1y_2 = \mathrm{th}\ \beta\mathrm{th}\ \gamma\cos A,$$

$$\mathrm{ch}\ \alpha = (1 - \mathrm{th}\ \beta\mathrm{th}\ \gamma\cos A)\mathrm{ch}\ \beta\mathrm{ch}\ \gamma,$$

化简即得双曲余弦定理.

从双曲余弦定理及 $\mathrm{sh}^2\beta = \mathrm{ch}^2\beta - 1$, $\mathrm{sh}^2\gamma = \mathrm{ch}^2\gamma - 1$,可得

$$\frac{\sin^2 A}{\mathrm{sh}^2\alpha} = \frac{1-\cos^2 A}{\mathrm{sh}^2\alpha} = \frac{1-\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{ch}^2\beta - \mathrm{ch}^2\gamma + 2\mathrm{ch}\ \alpha\mathrm{ch}\ \beta\mathrm{ch}\ \gamma}{\mathrm{sh}^2\alpha\mathrm{sh}^2\beta\mathrm{sh}^2\gamma},$$

上面等式中右边关于 α,β,γ 是对称的,类似可得 $\frac{\sin^2 B}{\mathrm{sh}^2\beta}$, $\frac{\sin^2 C}{\mathrm{sh}^2\gamma}$ 的表示式,它们也等于上式右边,而 $\frac{\sin A}{\mathrm{sh}\ \alpha}$, $\frac{\sin B}{\mathrm{sh}\ \beta}$, $\frac{\sin C}{\mathrm{sh}\ \gamma}$ 都是非负数,双曲正弦定理成立,这证明了(ⅲ).

利用双曲余弦定理及正弦定理可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos B\cos C + \cos A}{\sin B\sin C}\\
&= \frac{\mathrm{ch}\ \alpha[1-(\mathrm{ch}^2\alpha + \mathrm{ch}^2\beta + \mathrm{ch}^2\gamma) + 2\mathrm{ch}\ \alpha\mathrm{ch}\ \beta\mathrm{ch}\ \gamma]}{\sin B\sin C\mathrm{sh}^2\alpha\mathrm{sh}\ \beta\mathrm{sh}\ \gamma}\\
&= \mathrm{ch}\ \alpha\cdot\frac{1-(\mathrm{ch}^2\alpha + \mathrm{ch}^2\beta + \mathrm{ch}^2\gamma) + 2\mathrm{ch}\ \alpha\mathrm{ch}\ \beta\mathrm{ch}\ \gamma}{\sin^2 A\mathrm{sh}^2\beta\mathrm{sh}^2\gamma}
\end{aligned}$$

从(ⅲ)的证明知道最后一式中的分式等于1,因此

$$\mathrm{ch}\ \alpha = \frac{\cos B\cos C + \cos A}{\sin B\sin C}.$$

这三个公式是双曲三角形的边角关系的基本公式,它完全决定了双曲三角形的边角关系.我们称边角对应相等的双曲三角形全等,利用定理 5.3.1 可以给出两个三角形全等的条件.

性质 5.3.2 下列情况之一成立,则两双曲三角形全等:

(ⅰ)三边相等;(ⅱ)三角相等;(ⅲ)两边及夹角相等;(ⅳ)两角及一边相等.

证 下面证明(ⅳ),其余留作练习.要证明两个三角形的两角及一边对应相等则它们全等,只要证明如果一个双曲三角形的两角及一边确定,则其他边角也确定.设双曲$\triangle ABC$中$\angle BAC = A$与$\angle ABC = B$已知,以下分情况讨论.

(1) 边AB的长已知设为γ,由双曲三角形的角的余弦定理

$$\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\operatorname{ch}\gamma,$$

角$\angle ACB$也确定.因此如果两三角形的一边及此边上两角对应相等,则它们的三内角对应相等,由(ⅱ)这时两三角形全等.

(2) 设边AC的长为β,由双曲正弦定理

$$\operatorname{sh}\alpha = \frac{\sin A\operatorname{sh}\beta}{\sin B},$$

双曲正弦是单值函数,因此BC的边长α确定.由定理5.3.1

$$\operatorname{ch}\gamma = \operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta\cos C,$$

$$\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\operatorname{ch}\gamma,$$

可得

$$\operatorname{ch}\gamma = \frac{\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta\cos A\cos B}{1 + \operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta\sin A\sin B}.$$

所以BC的边长γ也确定.这里$\triangle ABC$的三边长都确定,由(ⅰ)可知两个三角形全等.

上面关于两角一边对应相等的三角形全等的证明要比欧氏三角形对应情况复杂一些,这是因为在双曲平面上三内角和是不确定的,关于这一点的完全证明见§5.4.

定理 5.3.3 双曲三角形的三内角和小于π.

证 假如$\triangle ABC$的内角和$A + B + C \geqslant \pi$,则$\pi - B - C \leqslant A < \pi$,因此

$$\cos A \leqslant \cos(\pi - B - C) = -\cos(B + C).$$

由双曲三角公式,得

$$\operatorname{ch}\alpha = \frac{\cos A + \cos B\cos C}{\sin B\sin C} \leqslant \frac{-\cos(B + C) + \cos B\cos C}{\sin B\sin C} = 1.$$

此与$\operatorname{ch}\alpha > 1$矛盾.因此任一双曲三角形的内角和小于$\pi$.

对于给定的三角形 ABC，$\pi-(A+B+C)$叫做$\triangle ABC$ 的角亏，可以证明对于任意给定的其和小于 π 的三正数，存在一个双曲三角形，使它的三内角分别等于给定的三正数.

如果三角形中有一个角是直角，则三角形成为直角三角形，从定理 5.3.1 可得到双曲直角三角形的基本公式.

性质 5.3.4 设在双曲三角形 ABC 中，$C=\frac{\pi}{2}$，则

(i) $\sin A=\frac{\mathrm{sh}\ \alpha}{\mathrm{sh}\ \gamma}$，$\cos A=\frac{\mathrm{th}\ \beta}{\mathrm{th}\ \gamma}$，

(ii) $\mathrm{ch}\ \gamma=\mathrm{ch}\ \alpha\mathrm{ch}\ \beta=\cot A\cot B$，

(iii) $\mathrm{ch}\ \alpha=\frac{\cos A}{\sin B}$.

证 $\sin A=\frac{\mathrm{sh}\ \alpha}{\mathrm{sh}\ \gamma}$，$\mathrm{ch}\ \alpha=\frac{\cos A}{\sin B}$及 $\mathrm{ch}\ \gamma=\mathrm{ch}\ \alpha\mathrm{ch}\ \beta$ 可以直接从定理 5.3.1 得到.从双曲余弦定理得

$$\cos A=\frac{\mathrm{ch}^2\beta\,\mathrm{ch}\ \alpha-\mathrm{ch}\ \alpha}{\mathrm{sh}\ \beta\,\mathrm{sh}\ \gamma}=\frac{\mathrm{sh}\ \beta\,\mathrm{ch}\alpha}{\mathrm{sh}\ \gamma}=\frac{\mathrm{sh}\ \beta\,\mathrm{ch}\ \gamma}{\mathrm{ch}\ \beta\,\mathrm{sh}\ \gamma},$$

这证明了(i)中后一式.由

$$\cot A=\frac{\mathrm{sh}\ \gamma\,\mathrm{th}\ \beta}{\mathrm{sh}\ \alpha\,\mathrm{th}\ \gamma}=\frac{\mathrm{ch}\ \alpha\,\mathrm{sh}\ \beta}{\mathrm{sh}\ \alpha}=\frac{\mathrm{sh}\ \beta}{\mathrm{th}\ \alpha},$$

及类似公式 $\cot B=\frac{\mathrm{sh}\ \alpha}{\mathrm{th}\ \beta}$可得 $\mathrm{ch}\ \gamma=\cot A\cot B$.

这些公式中 $\mathrm{ch}\ \gamma=\mathrm{ch}\ \alpha\mathrm{ch}\ \beta$ 称为双曲直角三角形的勾股定理.公式 $\mathrm{sh}\ \alpha=\sin A\,\mathrm{sh}\ \gamma$ 说明在双曲直角三角形中斜边大于直角边.

性质 5.3.5 双曲平面上，一点到直线的距离以垂线为最短.

如果在双曲平面上定义两点 A,B 之间距离为

$$d(A,B)=\frac{1}{2}\rho\ln R(AB,P_1P_2),$$

则边长为 α,β,γ，内角为 A,B,C 的$\triangle ABC$ 的双曲三角公式为

(i) $\mathrm{ch}\ \frac{\alpha}{\rho}=\mathrm{ch}\ \frac{\beta}{\rho}\mathrm{ch}\ \frac{\gamma}{\rho}-\mathrm{sh}\ \frac{\beta}{\rho}\mathrm{sh}\ \frac{\gamma}{\rho}\cos A$，

(ⅱ) $\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\operatorname{ch}\frac{\alpha}{\rho}$,

(ⅲ) $\frac{\sin A}{\operatorname{sh}\frac{\alpha}{\rho}}=\frac{\sin B}{\operatorname{sh}\frac{\beta}{\rho}}=\frac{\sin C}{\operatorname{sh}\frac{\gamma}{\rho}}$.

利用 Taylor 展开式

$$\operatorname{sh}\frac{\alpha}{\rho}=\frac{\alpha}{\rho}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^3+\cdots,$$

$$\operatorname{ch}\frac{\alpha}{\rho}=1+\frac{1}{2!}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^4+\cdots,$$

容易知道,当 ρ 趋于 $+\infty$,而$\triangle ABC$ 的边长保持不变时,从上面的三角公式分别可得

(ⅰ) $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cos A$,

(ⅱ) $\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C$,

(ⅲ) $\frac{\sin A}{\alpha}=\frac{\sin B}{\beta}=\frac{\sin C}{\gamma}$.

(ⅰ)与(ⅲ)分别是欧氏三角形的余弦与正弦定理,而(ⅱ)对欧氏三角形是恒等式,它等价于 $A+B+C=\pi$. 这说明欧氏平面可以看成双曲平面当双曲半径趋于无穷大时的极限情况.

5.3.2 直线与直线的相关位置

我们知道,双曲直线上有两个无穷远点,双曲直线是可以定义方向的,取定双曲直线的一个无穷远点相当于给出直线的一个方向. 假如 ξ 与 η 是极限平行线,它们交于无穷远点,这时我们称它们沿着同一方向平行.

性质 5.3.6 双曲平面上只有沿着同一方向平行的极限平行线具有传递性.

如图 5-3-2(a)与图 5-3-2(b),$\xi /\!/ \eta$,$\eta /\!/ \zeta$,但 ξ 与 ζ 都不平行,这是双曲平面与欧氏平面的又一不同之处.

关于两直线的相关位置有

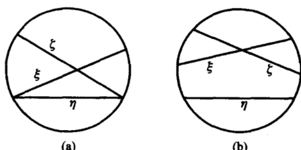


图 5-3-2

性质5.3.7 (ⅰ) 两直线垂直的充要条件是它们关于绝对形共轭;

(ⅱ) 两直线是极限平行线的充要条件是它们的双曲角度为零;

(ⅲ) 两直线平行但不是极限平行的充要条件是它们存在公垂线,这样的公垂线是唯一的.

证 (ⅱ)直线 $\xi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $\eta(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$是极限平行线的充要条件是它们的交点在绝对形 K 上,即

$$(\xi_2\eta_3-\xi_3\eta_2)^2+(\xi_3\eta_1-\xi_1\eta_3)^2-(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)^2=0.$$

经过简单计算可知它与

$$\cos^2\theta=\frac{(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2-\xi_3\eta_3)^2}{(\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2)(\eta_1^2+\eta_2^2-\eta_3^2)}=1$$

等价.

(ⅲ) 两直线平行但不是极限平行的充要条件是它们的交点在 K 外. 设直线 ξ 与 η 交于绝对形外一点 Z,则 Z 关于 K 的极线 ζ 与 ξ,η 都共轭,且交点都在 K 内,所以 ζ 是 ξ 与 η 的公垂线,这证明了(ⅲ)中条件的必要性.

反之,如果直线 ζ 与 ξ,η 都垂直,由(ⅰ)知道,ξ,η 与 ζ 都共轭,因此 ζ 的极点既在 ξ 上,又在 η 上,从而 ζ 的极点是 $\xi\times\eta$. 另一方面双曲平面上直线的极点在 K 外,ξ,η 是交于超理想点的直线,(ⅲ)中条件是充分的,这也证明了公垂线的唯一性.

如图 5-3-3，公垂线 ζ 与 ξ，η 分别交于点 P，Q，从性质 5.3.5知道，点 P，Q 之间的距离就是直线 ξ 与 η 之间点的最短距离，我们称它是直线 ξ 与 η 之间的距离.

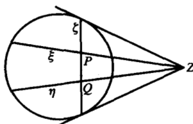


图 5-3-3

双曲运动把平行直线变为平行直线，进一步还有

例 1 设 ξ，η 和 ξ'，η' 是双曲平面上两组极限平行线，则存在双曲运动 φ，使 $\varphi(\xi)=\xi'$，$\varphi(\eta)=\eta'$.

证 如图 5-3-4，设 $E=\xi\times\eta$，$E'=\xi'\times\eta'$，在 η 上取点 A，过 A 作 ξ 的垂线，垂足是 B，由 §5.2，习题 3，η' 上存在点 A'，使 A' 到 ξ' 的距离就是 $d(A,B)$. 设 B' 是 A' 向 ξ' 作垂线的垂足，$d(A,B)=d(A',B')$. 作双曲运动 φ_1，使 $\varphi_1(B)=B'$，$\varphi_1(E)=E'$. 这时 $\varphi_1(A)$ 就是 A' 或者是 A' 关于 ξ' 的对称点，如果是后一种情况再作关于直线 ξ' 的反射，使 $\varphi_1(\eta)$ 成为 η'.

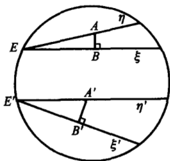


图 5-3-4

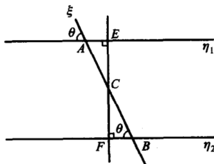


图 5-3-5

因此任意一对极限平行线是双曲平面上的全等图形.

例 2 如果一直线与另两直线相交成相等的同位角，则两直线平行，但不是极限平行线.

证 如图 5-3-5，直线 ξ 与 η_1，η_2 相交成相等的同位角 θ，

不妨设 $\theta<\frac{\pi}{2}$，否则考虑另一边的同位角．下证 η_1,η_2 存在公垂线．

设 ξ 与 η_1,η_2 交于 A,B；C 是线段 AB 的双曲中点．过 C 分别作 η_1,η_2 的垂线，垂足是 E,F．因为双曲三角形三内角和小于 π，E,F 分别在直线 ξ 的两侧．在 $\triangle ACE$ 与 $\triangle BCF$ 中：

$$\angle CAE=\angle CBF=\theta,\ \angle CEA=\angle CFB=\frac{\pi}{2},\ AC=CB,$$

所以 $\triangle ACE$ 与 $\triangle BCF$ 全等，三点 C,E,F 共线，EF 是 η_1,η_2 的公垂线．

例 3 如图 5－3－6，$ABB'A'$ 是双曲平面上四边形，$\angle A'AB=\angle ABB'=\frac{\pi}{2}$，边 AA' 与 BB' 双曲长相等，设为 a，AB 与 $A'B'$ 双曲长分别是 b,c，则

$$\text{sh}\,\frac{c}{2}=\text{ch}\,a\,\text{sh}\,\frac{b}{2}.$$

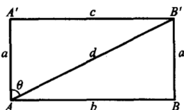


图 5－3－6

证 设 $\angle A'AB'=\theta$，AB' 的双曲长 d，在 $\triangle AA'B'$ 中

$$\text{ch}\,c=\text{ch}\,a\,\text{ch}\,d-\text{sh}\,a\,\text{sh}\,d\cos\theta,$$

而在直角三角形 ABB' 中

$$\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\text{sh}\,a}{\text{sh}\,d},\ \text{ch}\,d=\text{ch}\,a\,\text{ch}\,b.$$

消去 d 得

$$\text{ch}\,c=\text{ch}^2a\,\text{ch}\,b-\text{sh}^2a=\text{ch}^2a(\text{ch}\,b-1)+1,$$

利用 $2\text{sh}^2\,\frac{x}{2}=\text{ch}x-1$，得

$$\text{sh}\,\frac{c}{2}=\text{ch}\,a\,\text{sh}\,\frac{b}{2}.$$

例 3 中直线 AB 是直线 AA' 与 BB' 的公垂线，从上面讨论知道 $c>b$，此例给出了线段 AA'，BB' 相等时，AB，AA'，$A'B'$ 的双

曲长的关系.从 $\operatorname{sh}\frac{c}{2}=\operatorname{ch} a\operatorname{sh}\frac{b}{2}$ 知道,如果 A',B' 分别沿直线 AA',BB' 趋于无穷远点,$A'B'$ 的长度也无限增加.它的极限情况是,A',B' 是无穷远点,$A'B'$ 与 AA' 互为极限平行线,$A'B'$ 与 BB' 也是一对极限平行线.

例 4 试证对任意给定的角 $\theta<\frac{(n-2)\pi}{n}$,存在以 θ 为内角的正 n 边形.

证 如图 5-3-7,设 O 是绝对形的中心,A_1,A_2 是以 O 为中心的正 n 边形的两个顶点.设正 n 边形的内角是 θ,OA_1 与 OA_2 的长相等而夹角为 $\frac{2\pi}{n}$,过 O 向 A_1A_2 作垂线,垂足是 B_1,$\angle OA_1B_1=\frac{1}{2}\theta$,由性质 5.3.4,

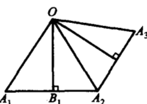


图 5-3-7

$$\operatorname{ch} d(O,B_1)=\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}>1,$$

所以 $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}>\frac{\pi}{n}$,即 $\theta<\frac{(n-2)\pi}{n}$.当 A_1 沿 OA_1 趋于无穷远点时,$\frac{\theta}{2}$ 趋于 0.另一方面,当 A_1 趋于 O 时,

$$1=\lim_{A_1\to O}\operatorname{ch} d(O,B_1)=\lim_{A_1\to O}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

这证明了随着 A_1 的变化,即正 n 边形的顶点到中心距离的变化,θ 可取到开区间 $\left(0,\frac{(n-2)\pi}{n}\right)$ 内任一值,也证明了对任意 $\theta\in\left(0,\frac{(n-2)\pi}{n}\right)$,存在以 θ 为内角的正 n 边形.

在§5.4我们将证明，双曲三角形 ABC 的面积是 $\pi-A-B-C$. 所以例4中正 n 边形的面积是

$$(n-2)\pi-n\theta.$$

当 n 充分大，θ 充分小时，正 n 边形的面积可以任意大.

从例4还可知道，当 $n\geqslant 5$ 时，$\frac{(n-2)\pi}{n}=\pi-\frac{2\pi}{n}>\frac{\pi}{2}$，这时存在内角是 $\frac{\pi}{2}$ 的正 n 边形，这种正 n 边形的面积是

$$\frac{1}{2}(n-4)\pi.$$

5.3.3 罗氏函数

如图5-3-8，设 ξ,η 是一对极限平行线，$E=\xi\times\eta$，设 A,B 分别是直线 ξ 与 η 上点，AB 垂直于 η. ω 是 $\angle BAE$ 的双曲角度，x 是线段 AB 的双曲长度，称 ω 是平行线 ξ,η 关于平行距 x 的平行角. 当点 A 在 ξ 上移动时，平行距 x 与相应的平行角 ω 都在改变，Lobachevsky 证明了它们之间存在着简单的函数关系.

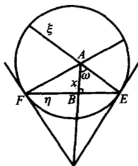


图5-3-8

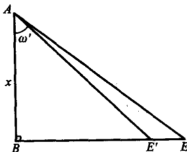


图5-3-9

定理5.3.8 对于任意一对极限平行线，ω 是 x 的函数，

$$\omega=2\operatorname{arccot}\mathrm{e}^{x}.$$

证 设 E' 是线段 BE 上一双曲点，$\omega'=\angle BAE'$，$\lim\limits_{E'\to E}\omega'=\omega$. 设 BE' 的双曲长为 α'，由性质5.3.4的证明，

$$\cot \omega' = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{th} \alpha}.$$

由 $\lim\limits_{E'\to E}\alpha' = +\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$，$\cot \omega = \lim\limits_{E'\to E}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{th} \alpha'} = \operatorname{sh} x$，得

$$e^{2x} - 2e^x \cot \omega - 1 = 0,$$

$$e^x = \frac{\cos \omega + 1}{\sin \omega} = \cot \frac{\omega}{2}.$$

因此 $\omega = 2\operatorname{arccot} e^x$.

在图 5－3－8 中，设 η 上另一无穷远点是 F，AF 是 η 的另一极限平行线，显然也有 $\angle FAB = \omega$，因此 AB 是 $\angle FAE$ 的角平分线．利用 §3.2，性质 3.2.11 可以知道，以 AB 为轴的双曲反射把直线 AE 变成 AF，这也证明 AB 是 $\angle FAE$ 的角平分线．由此得双曲平面上角平分线的作法．

如果 $x>0$，则 $0<\operatorname{arccot} e^x<\frac{\pi}{4}$，由定理 5.3.8 可得

推论 5.3.9 平行角是锐角，且是平行距的单调减函数，ω 可以取得区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内任一值．

设 A 是直线 η 外任一点，从 A 向 η 作垂线的垂足是 B，$d(A,B) = x$．设过 A 的直线 ζ 与 AB 的交角是 θ，则由罗氏函数知道，当 $\theta = \omega = 2\operatorname{arccot} e^x$ 时，ζ 是 η 的极限平行线；当 $\theta<\omega$ 时，ζ 与 η 相交；$\theta>\omega$，ζ 与 η 平行，但不是极限平行（图 5－3－8）．

习题 5.3

1．试证满足下列条件之一的双曲三角形是全等三角形，

(1) 三边相等； (2) 三角相等； (3) 两边及夹角相等．

2．设 $\triangle ABC$ 满足 $\beta = \gamma$，$\operatorname{ch} \alpha = \operatorname{ch}^2 \beta = 3$，

(1) 求 $\triangle ABC$ 的三内角； (2) 求 BC 边上的高．

3．证明双曲平面上四边形各边相等的充要条件是它的对角线相互垂直平分，这时四边形是平行四边形．

4. 设 ξ,η 是一对极限平行线，$E=\xi\times\eta\in K$，另一直线 ζ 与 ξ,η 分别交于 A,B，试证 $\angle BAE+\angle ABE<\pi$.

5. 设 ξ,η 是平行线，如果 $A\in\xi,B\in\eta$，使得 $d(A,B)$ 实现直线 ξ,η 之间的距离，则直线 AB 是 ξ,η 的公垂线.

6. 设 $\alpha,\beta,\gamma,A,B,C$ 分别是 $\triangle ABC$ 的三边长与三内角，$2s=\alpha+\beta+\gamma$，则

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{sh}s\operatorname{sh}(s-\alpha)}{\operatorname{sh}\beta\operatorname{sh}\gamma},\ \sin^2\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{sh}(s-\beta)\operatorname{sh}(s-\gamma)}{\operatorname{sh}\beta\operatorname{sh}\gamma}.$$

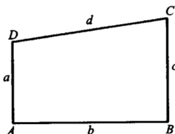
7. 证明双曲三角形的角平分线交于一点.

8. 试证明，如果双曲三角形两条边上的高交于一点，则第三条高也过此点.

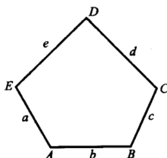
9. 设 $\triangle A'B'C'$ 与绝对形外切于 A,B,C，设 G 是 AA',BB',CC' 交点，试证点 G 到直线 AB,BC,CA 的双曲距离相等.

10. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=\angle ABC=\angle BCD=\frac{\pi}{2}$，线段 DA,AB,BC,CD 的双曲长分别是 a,b,c,d，试证

(1) $\operatorname{sh}d=\operatorname{ch}a\operatorname{sh}b$； (2) $\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b=\operatorname{ch}d\operatorname{ch}c$.



习题 10



习题 11

11. 在双曲五边形 $ABCDE$ 中除 $\angle EDC$ 外都是直角，如图各边长为 a,b,c,d,e，证明

(1) $\operatorname{sh}a\operatorname{ch}e=\operatorname{sh}c\operatorname{ch}d$；

(2) 如果 $\angle EDC$ 也是直角，则 $\operatorname{sh}a=\operatorname{ch}b\operatorname{ch}c\operatorname{sh}d-\operatorname{ch}d\operatorname{sh}b$；

(3) 利用以上结果计算 $\cos\frac{2\pi}{5}$.

§5.4 双曲弧长与面积

5.4.1 双曲平面上的几种曲线

定义 5.4.1 到定直线的双曲距离等于定长的点的轨迹称为定直线的等距线.

点到直线的距离以垂线为最短,下面求到 x 轴,即 $y=0$ 的等距线,定长为 r.一般情况利用双曲运动可以得到.

过 x 轴的欧氏垂线就是双曲垂线,点 $(x,y)\in H^2$ 到 x 轴的距离就是 (x,y) 与 $(x,0)$ 之间的双曲距离,所以

$$\operatorname{ch} r=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

即 $(\operatorname{ch}^2 r-1)x^2+\operatorname{ch}^2 r y^2=\operatorname{ch}^2 r-1$,即

$$x^2+(\coth^2 r)y^2=1.$$

这就是到 x 轴距离是 r 的点的轨迹,从欧氏观点看它是椭圆;在双曲平面上是相交于无穷远点的两条曲线(图 5-4-1).

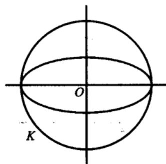


图 5-4-1

与欧氏平面上圆一样,双曲平面上到定点距离等于定长的点的轨迹称做**双曲圆**.中心在 $(0,b)$ 半径为 r 的双曲圆的方程是

$$\operatorname{ch} r=\frac{1-by}{\sqrt{1-b^2}\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

整理得:

$$(1-b^2)x^2+(1-b^2\bar{r}^2)y^2-2b(1-\bar{r}^2)y=\bar{r}^2-b^2,$$

其中 $\bar{r}=\operatorname{th} r$.如果 $b=0$ 得中心在原点的双曲圆

$$x^2+y^2=\operatorname{th}^2 r.$$

假如 A,B,C 是以 E 为圆心的双曲圆上三点,显然,EA,EB,

EC 的双曲长相等，E 也是线段 AB,BC,CA 中垂线的交点. 下例说明存在三角形其三边上的中垂线的交点不在 H^2 上，所以双曲平面上不共线的三点不是总能决定一双曲圆的.

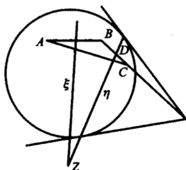


图 5-4-2

例 1 如图 5-4-2，设线段 AB 的中垂线是 ξ，过 ξ 上超理想点 Z 作直线 η，过 B 作 η 的垂线，垂足为 D，再在直线 BD 上取点 C 使 $BD=DC$，且 C 与 B 在 D 的两侧. 这样作出的三角形 ABC 的 AB 与 BC 边上中垂线交点不在 H^2 上，所以过 A,B,C 三点不存在双曲圆.

5.4.2 双曲弧长

这里讨论如何求双曲平面上曲线的长度. 与求欧氏平面上曲线的长度一样，双曲平面上曲线也可用折线来逼近，折线的长度的极限如果存在，就定义为曲线的弧长. 为此先考虑直线段弧长的微分.

设 (x,y) 是双曲平面上任一点，过 (x,y) 的直线可表示为 $\begin{cases}x(t)=x+\lambda t,\\ y(t)=y+\mu t.\end{cases}$ 设 $(x(t),y(t))$ 与 (x,y) 之间的双曲距离是 $s(t)$，则由 §5.1，性质 5.1.7 的证明可知

$$s(t)=\ln\frac{1+\sqrt{1-\sigma^2}}{\sigma},$$

$$\text{其中 } \sigma=\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}\sqrt{1-(x+\lambda t)^2-(y+\mu t)^2}}{1-x(x+\lambda t)-y(y+\mu t)}.$$

下面计算弧长微分 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0)$.

注意到 $\sigma(0)=1,\sigma'(0)=0,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{1-\sigma^2}\Big|_{t=0}$. 从

$$\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{1-\sigma^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sigma\sigma'}{\sqrt{1-\sigma^2}}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}(-(\sigma')^2-\sigma\sigma'')}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{1-\sigma^2}}$$

得到$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{1-\sigma^2}\right)^2\Big|_{t=0}=-\sigma''(0)$. 计算可得

$$\sigma''(0)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\sigma^2}{\mathrm{d}t^2}(0)=-\frac{(1-x^2-y^2)(\lambda^2+\mu^2)+(\lambda x+\mu y)^2}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0)=\frac{\sqrt{(1-y^2)\lambda^2+2xy\lambda\mu+(1-x^2)\mu^2}}{1-x^2-y^2}.$$

类似地不难得到,对任意 t:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{\sqrt{(1-y^2(t))\lambda^2+2x(t)y(t)\lambda\mu+(1-x^2(t))\mu^2}}{1-x^2(t)-y^2(t)},$$

其中 $\lambda=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\mu=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. 从微积分基本定理可知,直线 $x(t)=x+\lambda t$, $y(t)=y+\mu t$ 在区间$[t_0,t_1]$对应直线段的弧长是

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_0}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t\\ &=\int_{t_1}^{t_0}\frac{\sqrt{(1-y^2(t))\lambda^2+2x(t)y(t)\lambda\mu+(1-x^2(t))\mu^2}}{1-x^2(t)-y^2(t)}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

对于双曲平面上一般的曲线 $c(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[a,b]$, $x(t)$, $y(t)$是 t 的可微函数. 曲线 $c(t)$可以用折线来逼近,每一折线的方向可用此折线对应的曲线段上点处的切线方向$(x'(t),y'(t))$近似;而折线长的极限就定义为曲线在区间$[a,b]$上的弧长. 如果 x', y'存在且连续,则此极限存在,可以证明极限为

$$s=\int_a^b\frac{\sqrt{(1-y^2(t))x'^2(t)+2x(t)y(t)x'(t)y'(t)+(1-x^2(t))y'^2(t)}}{1-x^2(t)-y^2(t)}\mathrm{d}t.$$

定义 5.4.2 称 $\mathrm{d}s^2=\frac{(1-y^2)\mathrm{d}x^2+2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(1-x^2)\mathrm{d}y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$是

双曲平面的弧长元素.

注 利用微分几何的方法,可以用弧长元素来定义两方向的夹角,这样得到的角度跟§5.1中定义的角度是一致的.

定理 5.4.1 弧长元素 ds^2 是双曲运动不变的,所以曲线的双曲弧长也是双曲运动不变的.

证 这是由于双曲距离在双曲运动下不变,如果 $c(t)$ 是直线段的参数表示,则双曲运动下它的像也是双曲线段,由弧长元素定义可知道$\frac{ds}{dt}$在双曲运动下是不变的,所以弧长元素也是双曲运动不变的.

例 2 求以 O 为中心,双曲半径是 r 的圆周长.

解 双曲圆的方程是 $x^2+y^2=\mathrm{th}^2 r$,记 $\bar{r}=\mathrm{th}\ r$.双曲圆的参数方程是

$$x(t)=\bar{r}\cos t,\ y(t)=\bar{r}\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

于是 $x'=-\bar{r}\sin t, y'=\bar{r}\cos t$.代入上面公式,得双曲圆的弧长元素为$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{\bar{r}^2}{1-\bar{r}^2}$,积分得双曲圆周长

$$C=\int_0^{2\pi}\frac{\bar{r}}{\sqrt{1-\bar{r}^2}}dt=\frac{2\pi\bar{r}}{\sqrt{1-\bar{r}^2}},$$

以 $\bar{r}=\mathrm{th}\ r$ 代入,化简得 $C=2\pi\mathrm{sh}\ r$.

根据定理 5.4.1,任意一个半径为 r 的双曲圆的周长是 $C=2\pi\mathrm{sh}\ r$.以 $C(r)$ 表示半径是 r 的双曲圆周长,则双曲正弦定理可写成:

$$\frac{\sin A}{C(\alpha)}=\frac{\sin B}{C(\beta)}=\frac{\sin C}{C(\gamma)}.$$

如果在此公式中,A,B,C 是欧氏平面上$\triangle ABC$ 的三内角,α,β,γ 是它的三边长,$C(r)$ 是 r 为半径的欧氏圆周长,此公式成为欧氏三角形的正弦定理.

5.4.3 双曲面积

记弧长元素是 $ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$,其中

$$E = \frac{1-y^2}{(1-x^2-y^2)^2}, F = \frac{xy}{(1-x^2-y^2)^2}, G = \frac{1-x^2}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

定义 5.4.3 称 $d\sigma = \sqrt{EG-F^2}\,dxdy$ 是双曲面积元素.

以 E, F, G 代入化简可得

$$d\sigma = \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

利用面积元素可以计算双曲平面上区域的面积,设 D 是双曲平面上的区域,则区域 D 的面积是

$$\int_D d\sigma = \int_D \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

定理 5.4.2 双曲面积在双曲运动下不变.

证 把弧长元素 ds^2 表示为

$$ds^2 = (dx, dy)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

它在双曲运动下不变,自然它的行列式 $EG-F^2$ 也是在双曲运动下不变的. 所以面积元素 $d\sigma$ 也是双曲运动不变的.

例 3 半径为 r 的双曲圆的面积是 $4\pi \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2}$.

证 设双曲圆的圆心是 $O(0,0)$,圆内点可表示为

$$x = \lambda\cos\theta, y = \lambda\sin\theta, 0 \leqslant \lambda \leqslant \operatorname{th} r, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

由 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \lambda$,可知 $dxdy = \lambda d\lambda d\theta$. 所以

$$d\sigma = \frac{\lambda d\lambda d\theta}{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}},$$

圆面积是

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^{\text{th } r}\frac{\lambda\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\theta}{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}=2\pi(\text{ch } r-1)=4\pi\text{sh}^2\frac{r}{2}.$$

以下定理给出了双曲三角形的面积与三个内角和的关系，它是微分几何中 Gauss - Bonnet 公式在双曲平面上的特例. 在双曲平面 H^2 上给定的距离下，它的 Gauss 曲率是 -1.

定理 5.4.3 双曲三角形的面积等于它的角亏，即

$$S_{\triangle ABC}=\pi-(A+B+C).$$

证 一般三角形总可以分成两个直角三角形，所以只要对直角三角形证明即可. 设$\triangle ABC$ 的顶点 A 是原点，C 在 x 轴上，$\angle BCA=\frac{\pi}{2}$. AC 的欧氏长度是 $\bar{\beta}=\text{th }\beta$，如图 5 - 4 - 3，线段 AP 欧氏长度是 $\bar{\beta}\sec\theta$，P 是 BC 上点；利用极坐标，$\triangle ABC$ 内的点可表示为

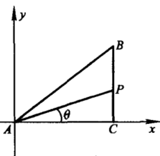


图 5 - 4 - 3

$$x=\lambda\cos\theta,\ y=\lambda\sin\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant A,\ 0\leqslant\lambda\leqslant\bar{\beta}\sec\theta,$$

由例 3，$\mathrm{d}\sigma=\dfrac{\lambda\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\theta}{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$. 所以$\triangle ABC$ 的面积是

$$S_{\triangle ABC}=\int_0^{A}\int_0^{\bar{\beta}\sec\theta}\frac{\lambda\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\theta}{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{A}\frac{\cos\theta}{(1-\bar{\beta}^2-\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}\theta-A$$

$$=\arcsin\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\bar{\beta}^2}}\Bigg|_0^{A}-A=\arcsin\frac{\sin A}{\sqrt{1-\bar{\beta}^2}}-A.$$

由于 $1-\bar{\beta}^2=1-\text{th}^2\beta=\dfrac{1}{\text{ch}^2\beta}$. 利用双曲三角公式 $\text{ch }\beta=\dfrac{\cos B}{\sin A}$，得

$$S_{\triangle ABC}=\arcsin(\cos B)-A=\frac{\pi}{2}-B-A=\pi-A-B-C.$$

从定理 5.4.3 知道，双曲三角形的面积最大值是 π，这时 $A=B=C=0$，三角形退化为三边两两极限平行的退化三角形.

把双曲平面上的多边形划分为三角形，可得到多边形面积与内角和的关系. 如图 5－4－4，双曲平面上五边形 $ABCDE$，它的内角分别是 A,B,C,D,E. 将三角形划分成三个三角形，可知五边形的面积是 $3\pi-(A+B+C+D+E)$. 所以五边形的面积决定它的内角和.

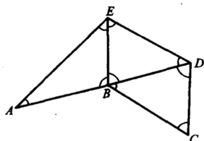


图 5－4－4

例 4 试证明双曲圆的同弧上的圆周角不一定相等，并且直径上的圆周角总小于 $\frac{\pi}{2}$.

证 设双曲圆的圆心是 D，$\triangle ABC$ 是此双曲圆的内接三角形，BC 过圆心 D，三线段 BD,DC,DA 的长度都等于双曲圆半径. 由双曲正弦定理，$\triangle BDA$ 与 $\triangle ADC$ 都是等腰三角形，$\angle ABD=\angle BAD$，$\angle DAC=\angle DCA$. 因此

$$\angle BAC=\frac{1}{2}(A+B+C)=\frac{1}{2}(\pi-S_{\triangle ABC})<\frac{\pi}{2}.$$

这证明了双曲圆直径上圆周角小于 $\frac{\pi}{2}$. 又显然 $\triangle ABC$ 的面积随着 A 的位置改变而变化，所以双曲圆的直径 BC 上圆周角并不相等 (图 5－4－5).

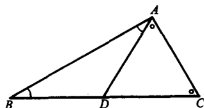


图 5－4－5

例 5 双曲三角形三边上的中线交于一点.

证 如图 5－4－6，设 E,F,G 是三角形 ABC 三边上的双曲中点，三中线是 AE,BF,CG. 从 A,B,C 分别作中位线 GF 的垂线，垂足分别是 H,K,L. 不难知道 $\triangle AGH$ 与 $\triangle BGK$ 全等，$\triangle AHF$ 与 $\triangle CLF$ 也全等，故有 $BK=AH=CL$.

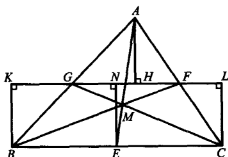


图 5－4－6

过点 E 作 BC 的垂线交 GF 于 N，$BN=CN$，所以 $\triangle BKN$ 与 $\triangle CLN$ 全等，因此 EN 垂直于 GF，是 BC 与 GF 的公垂线. 由于双曲运动不改变点与直线的结合关系，也不改变度量关系，可假设 E 是绝对形的中心，这时 EN 也是 BC 与 GF 的欧氏公垂线，GF 与 BC 欧氏平行. 设 BF 与 CG 交于 M，由于 E 也是 BC 的欧氏中点，由第四调和点的作法，A,M,E 共线，即双曲 $\triangle ABC$ 的三条中线交于 M.

由例 5 的证明及 Desargues 定理可知：

双曲三角形的三条中位线与底边的交点在双曲平面外的一条"直线"上.

如图 5－4－6，由于 EN 是 BC 的中垂线，它也垂直于 GF，EN 是 $\triangle EGF$ 的边 GF 上的高，这证明了：

双曲三角形三边上的中垂线是此三角形的三边上中点所成三角形的三条高.

这一性质在欧氏平面上也成立. 另外，在例 5 中证明了四边形

$BKLC$ 中 $\angle BKL = \angle CLK = \frac{\pi}{2}$，且 $KL = 2GF$. 所以 KL 是双曲直线 BK 与 CL 的公垂线，而由 §5.3 后面习题 5，KL 的双曲长小于 BC. 所以

双曲三角形的中位线长度小于底边的一半.

习题 5.4

1. 当双曲圆的半径大于 $\ln \cot \frac{\pi}{2n}$ 时，它不可能有外切正 n 边形.

2. 设正 n 边形的外接圆与内切圆半径分别是 R 与 r，则有 $\operatorname{th} r = \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{th} R$，并求这正 n 边形的面积.

3. 设双曲平面上四边形 $ABCD$ 的三个内角是直角，第四个角是 ω，

(1) 求四边形 $ABCD$ 的面积；

(2) 若角 ω 的两边相等，试证另外两边也相等；

(3) 若 $\omega = \frac{\pi}{3}$，且角 ω 的两边相等，这时各边的双曲长是多少.

4. 试证双曲平面上半径为 r 的双曲圆的内接正六边形的边长大于 r.

5. 设双曲三角形 ABC 的三边长是 $\alpha, \beta, \gamma, 2s = \alpha + \beta + \gamma$，试证 $\triangle ABC$ 的面积 $\triangle$ 满足：

$$\sin \frac{\triangle}{2} = \frac{\sqrt{\operatorname{sh} s \operatorname{sh}(s-\alpha) \operatorname{sh}(s-\beta) \operatorname{sh}(s-\gamma)}}{2 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} \operatorname{ch} \frac{\gamma}{2}}.$$

6. 在所有底边长为 α，且 $\beta + \gamma = \lambda > \alpha$ 的三角形 ABC 中，证明等腰三角形，即 $\beta = \gamma = \frac{\lambda}{2}$ 时三角形的面积最大，由此证明在周长一定时等边三角形面积最大.

7. 设在三角形 ABC 中，$C = \frac{\pi}{2}$，记三角形面积为 $\triangle$，则

$$\sin \triangle = \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta}{1 + \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta}.$$

8. 不用积分证明半径为 r 的双曲圆的面积为 $4\pi \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2}$，周长是 $2\pi \operatorname{sh} r$.

§5.5 双曲平面的其他模型

双曲几何除了 Klein 模型外,也可以在其他模型上实现,下面介绍另外两种常用的双曲平面的模型.

5.5.1 Poincaré 模型

设 S^2 是欧氏空间中以坐标原点为球心的单位球面,$S(0,0,1)$是它的北极,$H^2=\{(x_1,x_2,0)\mid x_1^2+x_2^2<1\}$是双曲平面.如图5-5-1,对于 H^2 上任一点 P,设 Q 是过 P 平行于 z 轴的直线与 S^2 的下半球面的交点,P'是直线 SQ 与 xOy 坐标面的交点,显然 P'仍在 H^2 上,这样定义了映射

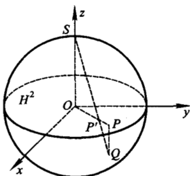


图 5-5-1

$$\varphi: H^2 \longrightarrow H^2, \varphi(P)=P'.$$

易见 φ 是双曲平面上的一个一一到上的映射,所以它是双曲平面上的变换.

如果 P 的欧氏坐标为 $(x_1, x_2, 0)$,则 $Q(x_1, x_2, -\sqrt{1-x_1^2-x_2^2})$,而 P'是 Q 在以 S 为中心的球极投影下的像,不难知道 P'的坐标$(z_1, z_2, 0)$满足

$$z_1=\frac{x_1}{1+\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}},\quad z_2=\frac{x_2}{1+\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}.$$

这也是变换 φ 在坐标下的表示式,它的逆变换 φ^{-1}是

$$x_1=\frac{2z_1}{1+z_1^2+z_2^2},\quad x_2=\frac{2z_2}{1+z_1^2+z_2^2}.$$

下面我们考察双曲平面上直线在 φ 下的像,设

$$\xi: ax_1 + bx_2 + c = 0,\ a^2 + b^2 - c^2 > 0,$$

是双曲平面上的直线，它在映射 φ 下成为：

$$2az_1 + 2bz_2 + c(1 + z_1^2 + z_2^2) = 0.$$

如果 $c=0$，则与原直线 ξ 重合．如果 $c\neq 0$，它可以改写成：

$$\left(z_1 + \frac{a}{c}\right)^2 + \left(z_2 + \frac{b}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2}(a^2 + b^2 - c^2).$$

从变换 φ 的构造不难知道，ξ 上的无穷远点在变换下不变，直线 ξ 的像是以 $\left(-\frac{a}{c}, -\frac{b}{c}\right)$ 为中心，半径为 $\frac{1}{|c|}\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ 的欧氏圆，利用欧氏勾股定理不难知道，圆 $\varphi(\xi)$ 与 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 是正交的，即这两个圆在交点处的切线是垂直的(图 5－5－2)．以上讨论总结为

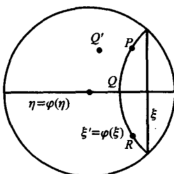


图 5－5－2

性质 5.5.1 双曲平面 H^2 上直线在变换 φ 下成为过点 O 的直线或与圆 $x_1^2 + x_2^2 = 1$(欧氏)垂直的圆弧．

反之可以证明 H^2 上过 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 的圆心的直线以及与它垂直的圆都是双曲平面上直线在 φ 下的像．

定义 5.5.1 称 $\widetilde{H}^2 = \{(x_1, x_2) \in E^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ 是双曲平面，过圆 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 的圆心的欧氏直线，以及与它垂直相交的圆在 $\widetilde{H}^2$ 上部分称作双曲平面上的直线，$x_1^2 + x_2^2 = 1$ 上的点叫无穷远点，这样定义的双曲平面叫 **Poincaré** 模型．

前面对于双曲平面 H^2 上讨论的所有内容都可以在 Poincare 模型上进行．下面推导此模型 $\widetilde{H}^2$ 上的距离公式，对 $\widetilde{H}^2$ 上任意两点 P, Q，它们的双曲距离 $d(A,B)$ 就是它们的逆像在 Klein 模型上的距离．设 P 的坐标是 $z=(z_1, z_2)$，Q 的坐标是 $w=(w_1, w_2)$，则 $\varphi^{-1}(P), \varphi^{-1}(Q) \in H^2$ 的坐标分别是

$$x=(x_1,x_2)=\frac{2z}{1+|z|^2},y=(y_1,y_2)=\frac{2w}{1+|w|^2},$$

其中$|z|^2=z_1^2+z_2^2,|w|^2=w_1^2+w_2^2$.根据性质 5.1.7 的证明

$$d(P,Q)=d(\varphi^{-1}(P),\varphi^{-1}(Q))=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-\sigma^2}}{1-\sqrt{1-\sigma^2}},$$

这里 $\sigma^2=\frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{(1-x\cdot y)^2}=\left[\frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)-4z\cdot w}\right]^2$,

$x\cdot y=x_1y_1+x_2y_2,z\cdot w=z_1w_1+z_2w_2$.记

$$a=1+|z|^2|w|^2-2z\cdot w,$$

$$b=|z|^2+|w|^2-2z\cdot w=(z_1-w_1)^2+(z_2-w_2)^2.$$

由于 $P,Q\in\widetilde{H}^2$ 是相异两点,不难知道 $a>b>0$.简单计算可知

$$a-b=(1-|z|^2)(1-|w|^2),$$

$$a+b=(1+|z|^2)(1+|w|^2)-4z\cdot w.$$

所以 $1-\sigma^2=\frac{4ab}{(a+b)^2}$.

$$d(P,Q)=\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\ln\frac{1+\sqrt{\frac{b}{a}}}{1-\sqrt{\frac{b}{a}}}.$$

这证明了

性质 5.5.2 在双曲平面的 Poincaré 模型上,两点 $P(z)$,$Q(w)$之间的距离是

$$d(P,Q)=\ln\frac{1+r}{1-r},$$

其中 $r=\sqrt{\frac{|z|^2+|w|^2-2z\cdot w}{1+|z|^2|w|^2-2z\cdot w}}$.

如图 5-5-2,设 ξ'是双曲平面的 Poincaré 模型上直线,P,Q,R 是ξ'上三点,由双曲距离的定义

$$d(P,Q)+d(Q,R)=d(P,R).$$

而对于不在 ξ' 上的任一点 Q',则有

$$d(P,Q')+d(Q',R)>d(P,R).$$

如果利用复数 $z_1+\mathrm{i}z_2$ 表示 $\widetilde{H}^2$ 上的点 $z=(z_1,z_2)$,以 $|z|$ 表示复数 z 的模长.容易得到

$$a=|1-z\overline{w}|^2, b=|z-w|^2.$$

性质 5.5.2 中 r 可表示为 $r=\dfrac{|z-w|}{|1-z\overline{w}|}$.这样,可以利用复变函数的理论研究双曲平面 $\widetilde{H}^2$:$|z|<1$.可以证明所有使圆周 $|z|=1$ 不变的线性变换

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z},\ \theta \text{ 是实数},\alpha \text{ 是复数},|\alpha|<1,$$

都是 $\widetilde{H}^2$ 上的等距变换,自然也是 $\widetilde{H}^2$ 上的双曲运动.

双曲平面的 Klein 模型上的弧长元素是

$$\mathrm{d}s^2=\frac{(1-x_1^2-x_2^2)(\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2)+(x_1\mathrm{d}x_1+x_2\mathrm{d}x_2)^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}.$$

利用 $x_1=\dfrac{2z_1}{1+|z|^2}, x_2=\dfrac{2z_2}{1+|z|^2}$,不难得到 Poincare 模型上的弧长元素

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2=\frac{4(\mathrm{d}z_1^2+\mathrm{d}z_2^2)}{(1-|z|^2)^2}.$$

自然它也可直接从 $\widetilde{H}^2$ 上距离公式得到.

用 $\mathrm{d}\tilde{s}^2$ 可以计算 $\widetilde{H}^2$ 上曲线的弧长,如果 $\widetilde{H}^2$ 上曲线与 H^2 上曲线是变换 φ 下的对应曲线,则它们关于 $\mathrm{d}\tilde{s}^2$ 与 $\mathrm{d}s^2$ 计算所得弧长是一样的.

类似地,可利用映射 φ 定义 Poincaré 模型上直线之间的夹角,在这样定义了 $\widetilde{H}^2$ 上点的距离与直线之间的夹角以后,§5.1—§5.4 中讨论的双曲平面上的结论对于 Poincaré 模型 $\widetilde{H}^2$ 都成立.

如果双曲平面的 Klein 模型与 Poincaré 模型上的点都用复数表示，则 φ^{-1}可表示成：

$$x_1+\mathrm{i}x_2=\frac{2(z_1+\mathrm{i}z_2)}{1+|z|^2},$$

这是复平面上的函数，它把单位圆内部的点变为内部的点.

5.5.2 双曲上半平面

仍设 S^2 是以原点为中心的单位球面，$H^2=\{(x_1,0,x_2)\mid x_1^2+x_2^2<1\}$是双曲平面.对于 H^2 上任一点 P，过 P 作 y 轴的平行线，交 S^2 的右半球面于 Q，S 与 Q 的连线交 xOy 平面于P'.易见，P'在 xOy 平面上 x 轴的上方：$y>0$.记

$$R_+^2=\{(x,y,0)\mid y>0\}=\{(x,y)\mid y>0\}.$$

由 P 到P'定义了映射 $\psi:H^2\longrightarrow R_+^2$.类似前面讨论，不难知道，$P(x_1,0,x_2)\in H^2$ 与它的像 $P'(x,y,0)=\psi(P)$之间关系是：

$$x=\frac{x_1}{1-x_2},y=\frac{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}{1-x_2},$$

其逆变换是 $\psi^{-1}:x_1=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2},x_2=\dfrac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}$.设

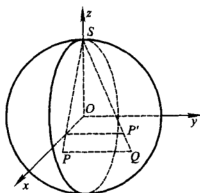


图 5-5-3

$$\xi:ax_1+bx_2+c=0,a^2+b^2-c^2>0$$

是 H^2 上一条直线，$\psi(\xi)$是

$$2ax + b(x^2 + y^2 - 1) + c(x^2 + y^2 + 1) = 0,$$

即 $(b+c)x^2 + 2ax + (b+c)y^2 + c - b = 0$. 类似 $\varphi(\xi)$，$\psi(\xi)$也有两种情况：

(1) $b + c = 0$，这时 $\psi(\xi)$：$2ax + c - b = 0$ 是(x, y)平面上垂直于 x 轴的直线；

(2) $b + c \neq 0$，这时 $\psi(\xi)$是圆心在 x 轴上的圆，这样的圆与 x 轴正交.

利用 $x = \frac{x_1}{1 - x_2}$，$y = \frac{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}{1 - x_2}$ 可验证 ψ^{-1} 把 R_+^2 上垂直于 x 轴的直线与圆变成H^2 上的直线. ψ 把H^2 上的无穷远点变成 x 轴上点及R_+^2 上无穷远点.

定义 5.5.2 称 $R_+^2 = \{(x, y) \mid y > 0\}$为双曲上半平面，垂直于 x 轴的直线以及圆心在 x 轴上的圆在上半平面部分叫做双曲直线，双曲平面 R_+^2 上不相交的直线叫平行线.

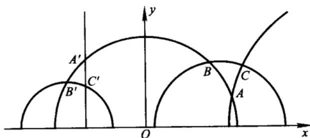


图 5-5-4

在图 5-5-4 中，直线 BC，$B'C'$与 y 轴互为平行线，A，B，C 与A'，B'，C'分别构成两个三角形.

$\widetilde{H}^2$ 与 R_+^2 点都用复数表示，则变换 φ^{-1}与 ψ 的合成 $\psi\varphi^{-1}$：$\widetilde{H}^2 \longrightarrow R_+^2$，$w = x + \mathrm{i}y = \psi(\varphi^{-1}(z))$可表示成：

$$w=\frac{\mathrm{i}+z}{1+\mathrm{i}z},$$

其逆为 $z=\frac{\mathrm{i}-w}{\mathrm{i}w-1}$. 利用这一表示式及 Poincare 模型 $\widetilde{H}^2$ 上双曲距离容易证明

性质 5.5.3 双曲上半平面 R_+^2 任两点 P,Q 的双曲距离

$$d(P,Q)=\ln\frac{1+r}{1-r},$$

其中 $z=z_1+\mathrm{i}z_2, w=w_1+\mathrm{i}w_2$ 分别表示 P,Q, $r=\frac{|z-w|}{|z-\overline{w}|}$.

这样, Klein 模型 H^2, Poincare 模型 $\widetilde{H}^2$, 双曲上半平面 R_+^2 是互相等距的双曲空间, 双曲上半平面 R_+^2 上弧长元素是

$$\mathrm{d}s^2=\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{y^2},$$

(x,y)是 R_+^2 上点.

第六章

平面椭圆几何

这一章简要的介绍平面椭圆几何.椭圆平面是在射影平面上定义适当的度量得到的,由于它与球面有着密切的联系,我们先讨论球面几何.椭圆几何,双曲几何与欧氏几何都是 Riemann 几何中常曲率空间的重要例子.

§6.1 球面几何与球面三角

在第一章,我们看到把球面的对径点看作同一点就得到射影平面,为了简捷的叙述平面椭圆几何的内容,我们先叙述球面几何.在三维欧氏空间中,到一定点的距离是常数的点的轨迹是球面.球面是最常见的图形之一,它具有完美的对称性,地球外壳就近似于球面.像地球这样半径极大的球面上局部区域与平面区域差不多,而欧氏几何正是在这种对局部球面几何的认识了解的基础上发展起来的.

6.1.1 球面的特征性质

任一平面与球面相交所得的交线是圆,过球心的平面与球面的交线是球面上半径最大的圆,称为大圆.过球心的直线与球面的两个交点称为一对对径点.

设 $f(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 是三维欧氏空间中的曲线,其中 $x(t),y(t),z(t)$ 是 t 的可微函数,(x,y,z) 是欧氏空间的直角坐标.曲线 $f(t)$ 对应参数 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 的曲线长是

$$\int_{t_0}^{t_1} |f'(t)|\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}t.$$

性质 6.1.1 过球面上任意两点(不是对径点)有唯一的大圆通过,且以此两点为端点的大圆劣弧是连此两点的球面上的最短曲线.

证 设球的中心在原点,半径是 R.采用球面极坐标,由于球面的对称性,不妨设两点是 $A(0,0,R)$,$B(R\sin\theta_0, 0, R\cos\theta_0)$,$0<\theta_0<\pi$.连接 A,B 两点的大圆劣弧的参数方程可以写成

$$f(t) = (R\sin t\theta_0, 0, R\cos t\theta_0),\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

设 $g(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (R\sin\theta(t)\cos\varphi(t), R\sin\theta(t)\sin\varphi(t), R\cos\theta(t))$是连接 A,B 的任一曲线,$\theta(t)$,$\varphi(t)$是 t 的可微函数,$0<t<1$,$\varphi(0)=\varphi(1)=0$,$\theta(0)=0$,$\theta(1)=\theta_0$.

由 $\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t = R\int_0^1 \theta_0\mathrm{d}t = R\theta_0$ 知道,连接 A,B 的劣弧长是 $R\theta_0$.而

$$\begin{aligned}\int_0^1 |g'(t)|\mathrm{d}t &= R\int_0^1 \sqrt{\theta'^2 + \varphi'^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}t \geqslant R\int_0^1 |\theta'|\mathrm{d}t \\ &\geqslant R\int_0^1 \theta'\mathrm{d}t = R\theta_0,\end{aligned}$$

等式成立,当且仅当 $\varphi'\equiv 0$,且 θ'保号,这时曲线 $f(t)$与 $g(t)$的像重合.

以下总假设球面半径为 1,中心在原点,记为 S^2.

定义 6.1.1 球面 S^2 上大圆是球面几何中直线,连接球面上两点的大圆劣弧是球面几何中线段,此线段的长度是两点之间的(球面)距离.

如果 A,B 是球面 S^2 上的对径点,则过这两点的大圆不唯一,并且每一个这样的大圆被此两点等分,每一段长是 π;如果 A,B 不是对径点,则由 O,A,B 三点确定的平面与S^2 的交线就是过 A,B 的大圆,并且向量$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$的夹角的弧度数就是连接A,B 的大圆劣弧的长度,也是 A,B 的球面距离.

定义 6.1.2 球面上两直线的夹角是交点处两大圆的切线的夹角.

不难看出这样定义的球面上直线(即大圆)之间的夹角就是这两个大圆所在平面之间的夹角.与平面上两直线的夹角一样,球面上直线之间的夹角也有两个,它们互补.

性质 6.1.2 过两非对径点的直线有且只有一条;任两直线交于两点(一对对径点).

如果把不相交的直线叫做平行线,那么球面上不存在平行线.

定义 6.1.3 设 A,B,C 是球面 S^2 上不共线的三点,且两两不是对径点,则它们唯一确定的三线段 AB,BC,CA 组成以 A,B,C 为顶点的球面三角形.

这样定义的三角形总在某个半球面内,也就是说它总在球面上某直线的一侧.球面 S^2 的总面积是 4π.设球面$\triangle ABC$ 的顶点的对径点是A',B',C',则$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$是全等三角形,它们的对应边长,内角都相等,自然它们的面积也相等.以 A,B,C 表示$\triangle ABC$ 的三内角,我们有下面的重要定理.

定理 6.1.3 球面$\triangle ABC$ 的面积是 $S_{\triangle ABC}=A+B+C-\pi$,其中 $A+B+C-\pi$ 称为$\triangle ABC$ 的角盈.

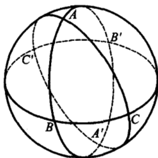


图 6-1-1

证 如图 6-1-1,由

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'BC}=2A,$$

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle AB'C}=2B,$$

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABC'}=2C,$$

以及 $S_{\triangle ABC'}=S_{\triangle A'B'C}$,$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle AB'C}+S_{\triangle A'B'C}=2\pi$,得

$$2S_{\triangle ABC}+(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle AB'C}+S_{\triangle A'B'C})$$

$$=2S_{\triangle ABC}+2\pi=2(A+B+C),$$

因此 $S_{\triangle ABC}=A+B+C-\pi$.

显然 $S_{\triangle ABC}<2\pi$,另一方面,对任意小的 $\varepsilon>0$,总可以作出球面三角形,使它的面积是 $2\pi-\varepsilon$.

推论 6.1.4 球面三角形三内角和大于 π,小于 2π.

6.1.2 球面三角公式

设$\triangle ABC$ 是球面三角形,仍以 A,B,C 表示它的三内角,α,β,γ 表示三边 BC,CA,AB 的长.

定理 6.1.5 设$\triangle ABC$ 是球面三角形,那么

(ⅰ) $\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A$,

(ⅱ) $\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\alpha$,

(ⅲ) $\dfrac{\sin A}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin B}{\sin\beta}=\dfrac{\sin C}{\sin\gamma}$.

证 (ⅰ) 如图 6-1-2,分别用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 表示矢量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$,由 Lagrange 恒等式

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c})=(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c}),$$

以及$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sin\gamma$,$|\vec{a}\times\vec{c}|=\sin\beta$,矢量 $\vec{a}\times\vec{b}$ 与$\vec{a}\times\vec{c}$ 的夹角为 A,可得:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c})&=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{a}\times\vec{c}|\cos\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}\times\vec{c})\\&=\sin\gamma\sin\beta\cos A,\end{aligned}$$

而$(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c})=\cos\alpha-\cos\gamma\cos\beta$.因此

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A.$$

(ⅱ)和(ⅲ)可以类似§5.3 利用(ⅰ)证明.

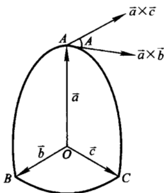


图 6-1-2

这三个公式是球面三角的基本公式,其中(ⅰ),(ⅱ)分别称为球面三角的边与角的余弦定理,(ⅲ)是正弦定理.正弦定理也可利用矢量运算直接证明如下:

由

$$(\vec{a}\times\vec{c})\times(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{a},\vec{c},\vec{b})\vec{a},$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{b}\times\vec{a})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})\vec{b},$$

得$|(\vec{a}\times\vec{c})\times(\vec{a}\times\vec{b})|=|(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{b}\times\vec{a})|$,即 $\sin A\sin\beta\sin\gamma=\sin B\sin\alpha\sin\gamma$.其他式子同理可得.

推论 6.1.6 球面三角形的三边长决定三角大小;同样三角也决定三边.

所以与双曲几何一样,球面几何中也没有相似三角形.

推论 6.1.7 设$\triangle ABC$中$C=\frac{\pi}{2}$,则

(ⅰ) $\sin A=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma},\cos A=\dfrac{\tan\beta}{\tan\gamma}$,

(ⅱ) $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta=\cot A\cot B$,

(ⅲ) $\cos\alpha=\dfrac{\cos A}{\sin B}$.

其中 $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$ 叫做球面直角三角形的勾股定理.

推论的证明留作练习.

6.1.3 球面上距离的坐标表示

设(x_1,x_2,x_3)是欧氏空间 E^3 中点的直角坐标,球面 S^2 上的点也可用(x_1,x_2,x_3)表示,$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$.点 $A(x_1,x_2,x_3)$,$B(y_1,y_2,y_3)\in S^2$ 之间的球面距离 $d_{S^2}(A,B)$就是以 A,B 为端点的大圆劣弧长,也就是矢量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$夹角的大小.所以有

$$d_{S^2}(A,B)=\arccos(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3),$$

或者 $\cos d_{S^2}(A,B)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$.

如果 A,B 是对径点,则 $d_{S^2}(A,B)=\pi$,这时上面公式仍成立.

下面讨论球面上直线之间的夹角,从球面直线定义知道,球面上直线可表示为

$$\xi:\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0,(x_1,x_2,x_3)\in S^2,$$

其中 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 ξ 所在平面的法矢的分量,直线 ξ 也可以用线坐

标(ξ_1,ξ_2,ξ_3)表示.球面上两直线 $\xi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$与 $\eta(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 的夹角中较小的一个角 θ 由下式决定:

$$\cos\theta=\frac{|\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3|}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}\cdot\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2}}.$$

如果采用直线的规范坐标,即要求 $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=1,\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2=1$,

$$\cos\theta=|\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3|.$$

以 $S^2(R)$表示半径为 R 的球面,设$\triangle ABC$ 是 $S^2(R)$上球面三角形,仍以 A,B,C 表示它的三内角,α,β,γ 表示它的三边长,则球面三角的基本公式应为:

(i) $\cos\frac{\alpha}{R}=\cos\frac{\beta}{R}\cos\frac{\gamma}{R}+\sin\frac{\beta}{R}\sin\frac{\gamma}{R}\cos A$,

(ii) $\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\frac{\alpha}{R}$,

(iii) $\dfrac{\sin A}{\sin\frac{\alpha}{R}}=\dfrac{\sin B}{\sin\frac{\beta}{R}}=\dfrac{\sin C}{\sin\frac{\gamma}{R}}$.

此三角形的面积为 $R^2(A+B+C-\pi)$.

如果令 $R\to\infty$,而保持$\triangle ABC$ 的三边长不变,利用

$$\cos\frac{x}{R}=1-2\sin^2\frac{x}{2R},\quad \lim_{R\to\infty}\frac{2R}{x}\sin\frac{x}{2R}=1,$$

不难从球面三角公式得到

(i) $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cos A$,

(ii) $\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C$,

(iii) $\dfrac{\sin A}{\alpha}=\dfrac{\sin B}{\beta}=\dfrac{\sin C}{\gamma}$.

其中(i),(iii)分别是欧氏平面三角形的余弦与正弦定理,而(ii)等价于 $A+B+C=\pi$.

习题 6.1

1. 试证到球面上一定点的(球面)距离相等的点的轨迹是平面曲线,求

出 S^2 上半径是 r 的球面上圆的周长 $C(r)$，$0<r<\pi$.

由此证明球面几何的正弦定理可以写成

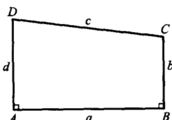
$$\frac{\sin A}{C(\alpha)}=\frac{\sin B}{C(\beta)}=\frac{\sin C}{C(\gamma)}.$$

2. 取 $\vec{A}=\vec{b}\times\vec{c}$，$\vec{B}=\vec{c}\times\vec{a}$，$\vec{C}=\vec{a}\times\vec{b}$，利用 Lagrange 恒等式证明球面三角公式(ⅱ).

3. 试证球面上一定直线的所有垂线过两定点.

4. 设△ABC 为球面直角三角形，$C=\frac{\pi}{2}$，如果记△ABC 的面积为△，则

$$\sin\triangle=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}.$$



习题 5

5. 设 $ABCD$ 是单位球面上四边形，$\angle DAB=\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$AB$，$BC$，$CD$，$DA$ 的长度分别是 a，b，c，d，试证：

(1) $\cos c=\cos a\cos b\cos d+\sin b\sin d$，

(2) 如果 $b=d<\frac{\pi}{2}$，则 $\sin\frac{c}{2}=\cos b\sin\frac{a}{2}$.

§6.2 平面椭圆几何

我们知道，过直线外一点，在欧氏平面上有唯一的一条平行线；在双曲平面上存在不止一条平行线；在球面上不存在平行线. 下面给出过直线外一点不存在平行线的度量空间，它与球面几何有密切的关系，是在射影平面上定义适当的度量得到的，对应的几何叫平面椭圆几何. 椭圆几何与仿射、欧氏、双曲几何一样，都是射影几何的子几何.

6.2.1 椭圆度量与椭圆几何

我们知道，拓广欧氏平面是射影平面的一个模型，如果不涉及无穷远点与无穷远直线，拓广平面上点之间的距离与直线之间的

夹角仍然有意义;但在拓广平面上,如果涉及无穷远点与无穷远直线,距离与直线之间的夹角都没有定义.并且可以证明,不能定义拓广平面上点之间的距离使它在欧氏平面上与原来距离一样.下面定义射影平面上点之间的距离与直线之间的夹角,做法与双曲平面类似.

设 K 是射影平面 P^2 上一条非退化没有实轨迹的二次曲线,由第三章关于射影二次曲线的讨论,存在 P^2 上射影坐标使 K 的方程是

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0.$$

以下就在这一坐标下讨论平面椭圆几何.

定义 6.2.1 将射影平面作为*椭圆平面*,P^2 上的点、直线以及它们的结合关系就是椭圆平面上的点、直线以及它们的结合关系,称 K 为椭圆平面的绝对形.

定义 6.2.2 使绝对形 K 变成自身的直射变换称为*椭圆运动*或*椭圆变换*.

设 $\varphi:\rho x'=Ax$ 是椭圆运动,φ 将绝对形 $K:x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ 变为自身的条件是 φ 的变换矩阵满足:$A^{\mathrm T}A=\lambda^2 I,\lambda\neq 0,\dfrac{1}{\lambda}A$ 是正交矩阵.如果在椭圆平面上采用*椭圆坐标*,即要求点 P 的坐标 (x_1,x_2,x_3) 满足 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$,那么 $\varphi:\rho x'=Ax$ 是椭圆运动的充要条件是 A 是正交矩阵,这时 $\rho=\pm 1$.

定理 6.2.1 椭圆平面上所有的椭圆运动构成群,它是直射变换群的子群.

椭圆几何是要研究椭圆平面上那些在椭圆运动下不变的性质,称为*椭圆性质*.如果只考虑点,直线以及它们的结合关系,那么椭圆几何与射影几何没有什么区别.因此射影几何的内容也都是椭圆几何的内容,射影几何中的定理与结论在椭圆几何中也成立.

性质 6.2.2 (i)椭圆平面上任两点决定一条直线,任两直线交于一点;

(ⅱ) 直线上两点将这直线分成两个区域，成为以此两点为端点的两线段.

设 A,B 是椭圆平面上两点，直线 AB 上其它点可以表示为 $\lambda a+\mu b, \lambda\mu\neq 0$. A,B 将这直线分成两线段，不难知道，$C,D,c=\lambda_1 a+\mu_1 b, d=\lambda_2 a+\mu_2 b$，属于同一线段的充要条件是 $R(AB,CD)=\frac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2}>0$.

设 A,B 是椭圆平面上任两点，P_1,P_2 是直线 AB 与绝对形 K 的两个虚交点. 在齐次坐标下，P_1,P_2 分别可以用 $\lambda_1' a+\lambda_2' b$，$\mu_1' a+\mu_2' b$ 表示，且不难知道可以假设，λ_1',λ_2' 的共轭复数分别是 μ_1',μ_2'，因此四点 A,B,P_1,P_2 的交比 $R(AB,P_1P_2)$ 满足

$$|R(AB,P_1P_2)|=\left|\frac{\mu_1'\lambda_2'}{\mu_2'\lambda_1'}\right|=1.$$

所以可设 $R(AB,P_1P_2)=e^{i\theta}$，与 Laguerre 定理一样假设 $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$.

定义 6.2.3 两点 A,B 的椭圆距离是

$$d(A,B)=\frac{1}{2}|\ln R(AB,P_1P_2)|.$$

采用前面定义的椭圆平面上椭圆坐标，不难证明距离公式可表示为

性质 6.2.3 设 $A(x_1,x_2,x_3),B(y_1,y_2,y_3)$，则

$$\cos d(A,B)=|x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3|.$$

与双曲距离一样，椭圆距离与椭圆平面的绝对形的选取有关，而与椭圆坐标无关.

定义 6.2.4 直线 $\xi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 与 $\eta(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 的交角 θ 为

$$\cos\theta=|\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3|,$$

其中 ξ,η 也是椭圆坐标，即 $\sum\xi_i^2=1,\sum\eta_i^2=1$.

这样定义的角度是 ξ,η 所成夹角中较小的一个.

利用椭圆运动的椭圆坐标下表示式不难验证

定理 6.2.4 椭圆距离与夹角都在椭圆运动下不变.

椭圆距离与角度是椭圆不变量,从距离与角度的定义可得

性质 6.2.5 (i)椭圆平面上任两点的距离不大于$\frac{\pi}{2}$,且$d(A,B)=\frac{\pi}{2}$的充要条件是A,B关于绝对形K共轭;

(ii)如果点A关于绝对形K的极线是ξ,则A与ξ上每一点距离是$\frac{\pi}{2}$;

(iii)两直线垂直的充要条件是它们关于K共轭.

要注意的是,虽然椭圆平面上任两点的距离不大于$\frac{\pi}{2}$,但是椭圆平面上线段的长度可以大于$\frac{\pi}{2}$(椭圆平面上直线的长度都是π).

到点$A(a_1,a_2,a_3)$的距离是r的点的轨迹称为椭圆平面上的圆,$\sum a_i^2=1$,由距离公式得圆的方程

$$(a_1x_2+a_2x_2+a_3x_3)^2=\cos^2 r,\ 0<r<\frac{\pi}{2}.$$

一般坐标下它成为$(a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3)^2=(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\cos^2 r$,它是椭圆平面上的一条二次曲线.当$r=\frac{\pi}{2}$时,它退化成为$A$的极线$a_1x_2+a_2x_2+a_3x_3=0$.直线$a_1x_2+a_2x_2+a_3x_3=0$与圆$(a_1x_2+a_2x_2+a_3x_3)^2=\cos^2 r$的几何性质是不一样的:过点$A$的直线与圆总有两个实交点,而与直线交于一点.

6.2.2 椭圆二次曲线

射影平面上二次曲线自然也是椭圆平面上的二次曲线.下面讨论椭圆平面上二次曲线的简化方程,即分类问题.为此先讨论椭圆平面上的坐标.

设$\{Q_1,Q_2,Q_3;E\}$是射影坐标系，使 K 的方程是 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$. 容易知道，Q_1,Q_2,Q_3 关于绝对形 K 两两共轭，且 $d(Q_i,E)=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. 我们把这种基点关于绝对形 K 构成自极三点形，且单位点与基点的距离都相等的坐标系$\{Q_1,Q_2,Q_3;E\}$称为椭圆坐标系. P^2 上点在椭圆坐标系下的坐标 $x=(x_1,x_2,x_3)$，$\sum x_i^2=1$，是椭圆坐标. 由于椭圆变换保持距离，椭圆变换把椭圆坐标系变成椭圆坐标系. 下面的引理说明，这样定义的椭圆坐标就是上面采用的坐标.

引理 6.2.6 设$\{Q_1,Q_2,Q_3;E\}$是椭圆坐标系，则 K 在此坐标系下方程为

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0.$$

证 由于 $Q_1Q_2Q_3$ 是 K 的自极三点形，由§3.2，K 在坐标系$\{Q_1,Q_2,Q_3;E\}$下方程为 $b_1x_1^2+b_2x_2^2+b_3x_3^2=0$. 由于 K 无实轨迹，可以假设 $b_i>0$. 设 P_1,P_2 是直线 Q_1E 与 K 的两个交点，不难算得：

$$P_1(\sqrt{b_2+b_3},\mathrm{i}\sqrt{b_1},\mathrm{i}\sqrt{b_1}),P_2(-\sqrt{b_2+b_3},\mathrm{i}\sqrt{b_1},\mathrm{i}\sqrt{b_1}).$$

所以

$$p_1=(\sqrt{b_2+b_3}-\mathrm{i}\sqrt{b_1})q_1+\mathrm{i}\sqrt{b_1}e,$$

$$p_2=(-\sqrt{b_2+b_3}-\mathrm{i}\sqrt{b_1})q_1+\mathrm{i}\sqrt{b_1}e,$$

$$\begin{aligned}
d(Q_1,E)&=\frac{1}{2}|\ln R(Q_1E,P_1P_2)|\\
&=\frac{1}{2}|\ln R(Q_1E,P_2P_1)|\\
&=\frac{1}{2}\left|\ln\frac{-\sqrt{b_2+b_3}+\mathrm{i}\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_2+b_3}+\mathrm{i}\sqrt{b_1}}\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|\ln\frac{b_1-b_2-b_3+2\mathrm{i}\sqrt{b_1}\sqrt{b_2+b_3}}{b_1+b_2+b_3}\right|
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{b_1-b_2-b_3+2\mathrm{i}\sqrt{b_1}\sqrt{b_2+b_3}}{b_1+b_2+b_3},$$

其中最后一个等式是因为单位复数$\dfrac{b_1-b_2-b_3+2\mathrm{i}\sqrt{b_1}\sqrt{b_2+b_3}}{b_1+b_2+b_3}$的虚部大于零.同理可得

$$d(Q_2,E)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{b_2-b_1-b_3+2\mathrm{i}\sqrt{b_2}\sqrt{b_1+b_3}}{b_1+b_2+b_3},$$

$$d(Q_3,E)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{b_3-b_1-b_2+2\mathrm{i}\sqrt{b_3}\sqrt{b_1+b_2}}{b_1+b_2+b_3}.$$

从 $d(Q_1,E)=d(Q_2,E)=d(Q_3,E)$,可得:

$$b_1-b_2-b_3=b_2-b_1-b_3=b_3-b_1-b_2,$$

即 $b_1=b_2=b_3$.这证明了在坐标系$\{Q_1,Q_2,Q_3;E\}$下

$$K:x_1^2+x_2^2+x_3^2=0.$$

利用引理 6.2.6 不难给出不同的椭圆坐标系决定的椭圆坐标之间的坐标变换公式.如果 $x=(x_1,x_2,x_3)$与 $x'=(x'_1,x'_2,x'_3)$是椭圆平面上点在不同的椭圆坐标系下的坐标,它们的坐标变换

$$\rho x'=Ax$$

满足,$A^{\mathrm{T}}A=I,\rho=\pm1$.

性质 6.2.7 对于椭圆平面上非退化的二次曲线,存在椭圆坐标使它的方程是

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}\pm\frac{x_3^2}{c^2}=0,\ abc\neq0,$$

其中±取决于二次曲线有无实轨迹.

证 设在椭圆坐标 x 下,二次曲线的方程是

$$x^{\mathrm{T}}Ax=0,\ A^{\mathrm{T}}=A,|A|\neq0.$$

利用代数中二次型化简知识可知,存在正交矩阵 T 使 $T^{\mathrm{T}}AT$ 是对角矩阵,设为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

由 $\rho x = Tx'$ 决定的坐标 x' 也是椭圆坐标. 在坐标 x' 下, 二次曲线方程成为

$$\lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2 + \lambda_3 x'^2_3 = 0.$$

自然它可以表示成性质 6.2.7 中形式.

性质 6.2.7 中坐标三点形是二次曲线的自极三点形, 所以性质 6.2.7 也可以叙述成:

对于任一条非退化的二次曲线 Γ, 存在椭圆坐标系 $\{Q_1, Q_2, Q_3; E\}$, 使 Q_1, Q_2, Q_3 是 Γ 的自极三点形.

性质 6.2.8 如果在椭圆坐标系 $\{Q_1, Q_2, Q_3; E\}$ 下, 二次曲线 Γ 的方程是 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0$, 则过点 Q_i 的直线与 Γ 的交点到 Q_i 的距离相等 $(i = 1, 2, 3)$.

证 下面以过 Q_3 的直线 $\xi(1, \lambda, 0)$ 为例通过计算证明. 直线 ξ 与 Γ 的交点

$$R_1\left(-\frac{\lambda}{c}, \frac{1}{c}, \sqrt{\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}}\right),\ R_2\left(-\frac{\lambda}{c}, \frac{1}{c}, -\sqrt{\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}}\right),$$

所以

$$d(Q_3, R_1) = d(Q_3, R_2) = \arccos\sqrt{\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}}.$$

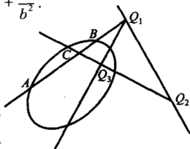


图 6-2-1

如图 6-2-1, 过 Q_3 的任一直线与 Γ 交于两点; 而 Q_1, Q_2 是 Γ 的两切线点. 设过 Q_1 的直线与 Γ 交于 A, B; A, B 分直线 AB 成两线段, 由性质 6.2.8, $d(Q_1, B) = d(Q_1, A)$, 而由于 $C = AB \times Q_2 Q_3$ 在 Q_1 关于 K 的极线

上，$d(C,Q_1)=\frac{\pi}{2}$．所以 $d(A,C)=d(B,C)=\frac{\pi}{2}-d(Q_1,B)$．这证明了：

过 Q_1 的直线与二次曲线 Γ 交点所成两线段的中点轨迹是 Q_1 与直线 Q_2Q_3．类似的结论对于 Q_2,Q_3 也成立．

性质 6.2.8 告诉我们，对于任一条非退化有实轨迹的二次曲线，至少存在三点，使过其中任一点的直线如果与二次曲线相交，则此点是交点所成两线段之一的中点．

利用椭圆变换与椭圆坐标变换的关系不难证明，椭圆平面上两条二次曲线如果具有相同的简化形式，那么存在椭圆变换将其中一条变为另一条．

6.2.3 球面几何与椭圆几何的关系

将欧氏空间中单位球面 S^2 的对径点等同于一点，就得到椭圆平面（见§1.2）．这样定义的映射记为 $\Phi: S^2 \longrightarrow P^2$，$\Phi$ 是 2 对 1 的映射，但是限制 Φ 于 S^2 的一个半球面内（不包含边界），Φ 是单射．设 $A(x_1,x_2,x_3)$，$B(y_1,y_2,y_3)$ 是球面上两点，$\bar{A}(-x_1,-x_2,-x_3)$，$\bar{B}(-y_1,-y_2,-y_3)$ 分别是它们的对径点．A,B 的球面距离是

$$d_{S^2}(A,B)=\arccos(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3),$$

而

$$d_{S^2}(\bar{A},B)=\arccos(-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3).$$

A,B 的像 $\Phi(A)$，$\Phi(B)$ 的椭圆距离是

$$d(\Phi(A),\Phi(B))=\arccos|x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3|,$$

它是 $d_{S^2}(A,B)$ 与 $d_{S^2}(\bar{A},B)$ 中较小的一个，即有

$$d(\Phi(A),\Phi(B))=\begin{cases} d_{S^2}(A,B), & \text{若 } d_{S^2}(A,B)\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ \pi-d_{S^2}(A,B), & \text{若 } d_{S^2}(A,B)>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

所以如果 A,B 在球面上靠得较近$\left(\text{距离}<\frac{\pi}{2}\right)$,则它们的球面距离与它们在 Φ 下的像的椭圆距离是一样的. Φ 的这一性质叫做 Φ 是局部等距的,也称球面 S^2 与椭圆平面 P^2 是局部等距的. 这也说明了椭圆距离定义的合理性,也就是说椭圆距离满足§5.1中性质5.1.5的类似的性质.

映射 Φ 还把球面 S^2 上直线(大圆)映成椭圆平面上的直线,并且 Φ 限制于 S^2 上任一直线上也是2对1的.球面 S^2 上直线长为 2π,椭圆平面上直线长为 π. 设 A,B 是椭圆平面上两点,如果 A,B 关于 K 共轭,则 A,B 分直线 AB 所成的两线段长都是 $\frac{\pi}{2}$;如果 A,B 不共轭,则 $d(A,B)<\frac{\pi}{2}$,两线段中不包含 A 的共轭点的一段长为 $d(A,B)$,另一段长为 $\pi-d(A,B)$.

比较球面上直线的交角公式与椭圆平面上直线的交角公式,可知映射 Φ 保持两直线的夹角不变,Φ 的这一性质称它是保角映射. 由于 Φ 是局部等距,保角的,利用这些性质可以从球面的弧长元素,面积元素得到椭圆平面上的弧长与面积元素.

在球面 S^2 上有一个自然定义的点到直线的映射. 设 P 是球面上任一点,ξ 是过球心而垂直 OP 的平面与球面的交线,O 是球心,由 P 到 ξ 定义了球面上点到直线的映射. 这一映射把球面上的一对对径点对应为同一直线,叫做球面上的对偶映射. 对偶映射把球面上的共线的点映射成过同一对对径点的直线,它有许多有趣的性质,也可用于研究球面几何. 在球面 S^2 与椭圆平面之间的映射 Φ 下,球面上的对偶映射成为椭圆平面上的一个映射,它恰是椭圆平面上关于绝对形 K 的由极点极线决定的配极变换. 在§3.2我们知道,配极变换是射影平面上的一种对偶映射,把它应用于射影几何的一个关于点与直线的结合关系的命题就得到它的对偶命题.

6.2.4 椭圆三角学

设 A,B,C 是椭圆平面上不共线的三点，连接其中任意两点有两条线段，所以椭圆平面上不共线的三点不能像仿射，欧氏或双曲几何那样唯一的确定一个三角形．下面定义椭圆三角形．

定义 6.2.5 由椭圆平面上不共线的三点以及连接其中两点的不共线的三线段构成的图形，如果存在一直线与此图形无交点，则称它是椭圆平面上的三角形．

三点是三角形的三顶点，三线段为边，三线段两两所成角叫三角形的内角．

从定义立即知道，如果取与三角形不相交的直线作为 P^2 上的特殊直线，则该图形成为由此直线决定的仿射平面上的三角形．

性质 6.2.9 不共线的三点可以构成椭圆平面上四个不同的三角形．

如图 6－2－2(a)，椭圆平面上不共线的三点 A,B,C 的两两连线把椭圆平面分成不连通的四部分Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，每一区域的边界所成的连接 A,B,C 的三线段都构成一个三角形．这些三角形的内角与边长一般不相等．四个三角形的以 A 为顶点的四个内角的和是 2π；由区域Ⅰ，Ⅱ的边界所成的两个三角形有一条公共边，而另两条边分别是直线 AB 与 BC 上的线段．图 6－2－2(b)中连

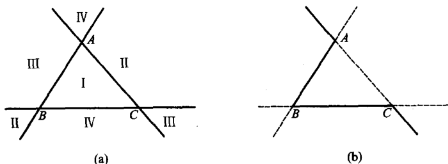


图 6－2－2

接 A, B, C 的三线段(实线部分)不能构成三角形,因为任一直线与此三线段都有交点.

性质 6.2.10 设$\triangle ABC$ 是椭圆平面上三角形,则有球面 S^2 上三角形 $A'B'C'$,使映射 Φ 把$\triangle A'B'C'$上点一一的映到$\triangle ABC$上.

证 设 ξ 是椭圆平面上直线,ξ 与$\triangle ABC$ 无交点. $\Phi^{-1}(\xi)$是 S^2 上直线,限制 Φ 于由 $\Phi^{-1}(\xi)$划分的 S^2 的任一开半球内,Φ 都是此开半球到椭圆平面上除去直线 ξ 上点以后余下部分的一一映射,并且 Φ 是保角和保持区域内线段长度的映射. 由此可得开半球内$\triangle A'B'C'$,它的边,角都与$\triangle ABC$ 相等.

以 A, B, C 表示椭圆$\triangle ABC$ 的三内角,α, β, γ 为三边长. 利用性质 6.2.10,从§6.1 定理 6.1.5 可以得到

定理 6.2.11 设$\triangle ABC$ 是椭圆平面上的三角形,则

(ⅰ) $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$,

(ⅱ) $\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha$,

(ⅲ) $\dfrac{\sin A}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin B}{\sin\beta} = \dfrac{\sin C}{\sin\gamma}$.

其中(ⅰ),(ⅱ)分别叫作椭圆三角形的边与角的余弦定理,(ⅲ)叫椭圆三角形的正弦定理.

同样从§6.1 可得

定理 6.2.12 椭圆$\triangle ABC$ 的面积

$$S_{\triangle ABC} = A + B + C - \pi,$$

其中 $A + B + C - \pi$ 叫椭圆三角形的角盈.

上面看到球面几何与椭圆几何有密切的联系,它们有许多相似之处,但也有许多不同之处. 例如还有:

(1) 球面上直线将球面分成不连通的两部分,而椭圆平面上的直线不划分椭圆平面.

(2) 球面是双侧的,一只在球面内侧活动的小虫,如果不穿过球面就不能到达球面的外侧;而椭圆平面(即射影平面)是单侧的.

如图 6－2－3(a)，在椭圆平面的半球面模型上(截口上对径点看作同一点)，一只小虫从点 R 出发沿箭头方向经过 F 回到 R，这时原来在它左边的点到了它的右边，而这在球面与欧氏平面上都做不到．利用下面的做法可以进一步说明这一点．

从椭圆平面上去掉以 F 为中心，半径小于 $\frac{\pi}{2}$ 的圆盘，则剩下的部分是单侧的 Mobius 带．具体做法见图 6－2－3(a)至 6－2－3(d)．图 6－2－3(b)是从图 6－2－3(a)上去掉以 F 为中心的圆盘，然后沿 $A-D-B$ 剪开；图 6－2－3(c)是将图 6－2－3(b)中图形沿 $A-E-C$ 剪开，然后沿 $A-R-P-A$ 粘贴；图 6－2－3(d)是由图 6－2－3(c)沿 $C-E-A-D-B$ 粘贴而成．图 6－2－3(d)中图形是 Mobius 带，它是椭圆平面的一部分．由作法也可知，沿 Mobius 带的边界拼接上一个圆盘就得到椭圆平面．

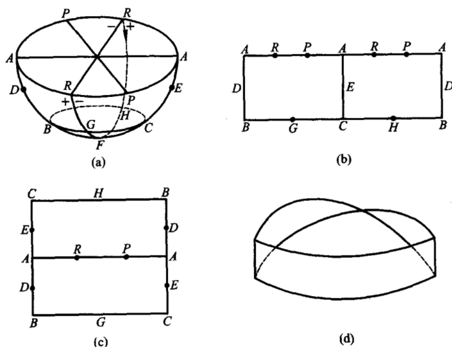


图 6－2－3

欧氏几何,双曲几何与椭圆几何都是度量几何,在它们上面都可以讨论距离,夹角,面积等度量性质.下面简单说说这些名称的由来,我们知道,双曲平面上任一直线有两个无穷远点;椭圆平面上的直线没有无穷远点;欧氏平面上的直线有一个无穷远点.另一方面,双曲线,抛物线,椭圆如果看成拓广欧氏平面上的曲线,则它们上面无穷远点的个数分别是两个,一个,零,所以也称欧氏几何为抛物几何.双曲几何与椭圆几何也由此命名,这些名称是 Klein 首先提出的.

习题 6.2

1. 试证椭圆平面上一定直线的所有垂线过一定点.

2. 证明椭圆平面上任两直线存在唯一的公垂线.

3. 验证,如果以 $i\alpha, i\beta, i\gamma$ 分别代替双曲三角公式中 α, β, γ 就可以得到椭圆三角形的基本公式.

4. 设 $\{Q_1, Q_2, Q_3; E\}$ 是椭圆坐标系,$A = Q_1E \times Q_2Q_3$, $B = Q_2E \times Q_1Q_3$, $C = Q_3E \times Q_1Q_2$,

(1) 计算 $\triangle Q_1CE$ 的三边长与三内角,并求出 $\angle Q_1BC$;

(2) 证明 $d(Q_1, E) < 2d(E, A)$, $d(Q_2, Q_3) < 2d(B, C)$.

5. 证明,对于椭圆平面上任一条非退化有实轨迹的二次曲线 Γ,存在唯一的点 C,使过 C 的任一直线与 Γ 有两个交点,且 C 是此两交点所成线段之一的中点.

6. 设椭圆平面上四边形 $ABCD$ 的三个内角都是直角,第四个角是 ω,

(1) 求四边形 $ABCD$ 的面积;

(2) 若角 ω 的两邻边相等,证明另外两边也相等;

(3) 若 $\omega = \frac{2\pi}{3}$,且角 ω 的两邻边相等,求各边长.

7. 试证椭圆三角形的三条高交于一点.

8. 试证椭圆三角形的三条中线交于一点.

9. 试证椭圆三角形的三条中位线与底边的交点共线.

10. 证明任意椭圆三角形存在外接圆与内切圆.

§6.3 变换群与几何学

1872 年,德国数学家 Klein 在 Erlangen 大学作了一次题为"近世几何学研究的比较评论"的讲演.讲演中,Klein 根据当时已发展起来的变换群论观点,把所有的几何学综合起来,并用变换群给出了几何学的定义,这就是通常所说的 **Erlangen 纲领**.

在集合 S 上用某种方法给出几何学的构造时,则 S 称为空间.Erlangen 纲领的思想可以概括如下:"设已给出空间 S 与 S 上的变换群 G,那么 S 的子集,也就是图形,可能具有多种性质,研究这些性质中,在属于 G 的所有变换下保持不变的性质的学科,称为从属于 G 的空间 S 的几何学".

也就是说,Klein 认为,在每一种几何中,总有一个变换群起着重要的作用,相应的几何学就是研究在这种变换群作用下,图形的不变性质和不变量的科学.关于几何学(S,G),如果把群 G 用它的子群 G' 代替,则可以得到新的几何学(S,G').对应于 G 的一系列子群,可得到一系列的几何学.例如,使 S 的特定图形 M 保持不变的 G 的全体变换构成 G 的子群 $G(M)$,可以认为 $G(M)$ 作用于从 S 去掉 M 所得的子空间 S',这样就得出新的几何学$(S',G(M))$.这时,指定的图形 M 称为绝对形.这样,就可从一种几何学导出多种几何学.Klein 的变换群观点揭示了多种几何之间的本质联系与区别.

射影几何学是研究射影平面在直射变换群下不变的性质与量的几何学.我们知道,点与直线的各种结合关系在直射变换下是不变的,是主要的射影性质;共线四点或共点四直线的交比是基本的射影不变量.所以凡是可以用点与直线结合关系叙述的定理与性质都是射影性质.譬如,Desargues 定理,Pappus 定理等.根据 Steiner 定理,二次曲线也是射影几何研究的内容,关于二次曲线的点与直线的结合关系的 Pasacl 定理,Brianchon 定理也都是射影

几何的定理.把射影平面上的变换群(直射群)换成它的子群椭圆变换群,研究射影平面上在椭圆变换群作用下不变的性质的几何成为椭圆几何.又例如,把仿射平面的仿射变换群换成它的子群欧氏变换群得到欧氏几何.在这两种情况几何空间都没有改变,变换群改变了.仿射几何与欧氏几何的绝对形都是射影平面上的直线,双曲几何的绝对形是射影平面上的一条非退化有实轨迹的二次曲线.仿射、欧氏与双曲几何跟射影几何比较,它们的空间是不一样的,变换群也不一样.

如果(S,G)是一种几何学,对于 S 上的两个图形,如果存在 G 中元素把一个图形变成另一个,那么称这两个图形是全等的.由于 G 是群,容易验证空间 S 上这种全等关系是等价关系,即任一图形与自身全等;如果 M 与 M' 全等,M' 也与 M 全等;如果 M 与 M' 全等,M' 与 M'' 全等,则 M 与 M'' 也全等.从本书讨论知道,射影平面上任意两个三点形,三线形分别全等;一直线上四点与另一直线上四点全等的充要条件是它们的交比相等.在射影平面上,任两条有实轨迹非退化的二次曲线全等.

在§4.5,我们讨论了射影几何,仿射几何,欧氏几何与它们各自变换群的关系,这里不再重复.欧氏几何,双曲几何,椭圆几何都是度量几何,它们的绝对形是直线或二次曲线.两点之间的距离,两直线的夹角都是各自变换群下的不变量.下面以射影几何中的 Desargues 定理为例进一步说明射影几何在其它几何中的应用.

定理 6.3.1 设$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$是欧氏平面上两个三角形,如果它们的对应顶点连线交于一点或者互相平行,且有两对对应边交点在直线 ξ 上,则第三对对应边的交点也在 ξ 上,或者第三对对边都平行于 ξ.

这是射影几何中的 Desargues 定理在欧氏几何中的情形,下面的定理是 Desargues 定理的逆定理在欧氏几何中的应用.

定理 6.3.2 如果欧氏平面上两个三角形的对应边都平行,那么它们的对应顶点的连线也平行或者交于一点.

如果双曲平面上两个三角形对应边的交点在双曲平面上并且共线，那么它们的对应顶点的连线在射影平面交于一点. 如果这一点不在双曲平面上，也不在绝对形上，这一点关于绝对形的极线是三角形的对应顶点连线的公垂线. 于是有

定理 6.3.3 设$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是双曲平面上两个三角形，如果它们的对应边交点在一双曲直线上，那么它们的对应顶点的连线必属于下列三种情况之一：

（ⅰ）交于双曲平面上一点；（ⅱ）是沿同一方向平行的极限平行线；（ⅲ）具有公共的公垂线.

下面的定理是 Desargues 定理的逆定理在双曲几何中的情形.

定理 6.3.4 设$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是双曲平面上的三角形，如果它们的对应边分别平行，且 AB 与 $A'B'$，AC 与 $A'C'$，BC 与 $B'C'$的公垂线交于一点，则它们对应顶点的连线属于下列三种情况之一：

（ⅰ）交于双曲平面上一点；（ⅱ）是沿同一方向平行的极限平行线；（ⅲ）具有公共的公垂线.

产生这些情况的原因自然是欧氏平面与双曲平面都只是射影平面的一部分，从射影几何观点来看存在的点或直线在欧氏几何或双曲几何里不存在，但是都可以给以适当的解释.

欧氏几何的变换群是欧氏变换群，它是直射变换群的子群；双曲几何与椭圆几何的变换群分别是双曲变换群与椭圆变换群，它们也是直射变换群的子群. 射影平面上的直射变换群依赖于 8 个独立参数，而相应的欧氏、双曲、椭圆变换群分别依赖于 3 个独立参数，平面仿射变换群依赖于 6 个独立参数，所以欧氏、仿射、双曲、椭圆变换群作为直射变换群的子群比直射变换群要小得多. 作为一种几何，变换群越小，所要满足的不变条件减少，其几何内容越丰富. 作为练习，读者可以把本课程中讨论的各种空间，相应的变换群及其几何研究的主要内容以及它们的不变量与不变性质作一整理. 读者也可试着证明，对于欧氏、双曲、椭圆三种度量几何，

距离都是最主要的不变量，等距是最主要的度量性质．在这些度量空间上，点与直线的结合关系等不变性质都可以用距离表示．

自然，直射变换群的子群很多，可以研究的几何也很多，也可以研究其他数域，如复数域，有限域上的射影几何，高维的射影几何．有兴趣的读者可以作进一步的学习研究．

Klein 的变换群观点在近代几何的发展中起了重要的作用，在几何的发展史上差不多支配了半个世纪之久．Erlangen 纲领使人们看清了古典几何学的本质，成为研究几何学的指导原理，具有很大的历史价值．

现代几何的发展早已超越了 Klein 的思想，进一步研究可以发现本书讨论的几何空间都是齐性空间或对称空间的特例，它们都是某些群的商空间．也发现了许多不属于 Klein 观点的几何学，例如现代微分几何研究的中心内容之一：Riemann 几何．Riemann 几何是研究具有度量的微分流形上的几何学，这样的空间叫 Riemann流形．在 Riemann 流形上虽然有度量也能定义其上两点之间的距离，但是一般来说没有与之相当的变换群（等距变换群）；如果有，一般也比同维数的欧氏空间上的变换群的维数要小．所以 Riemann 几何不能看作 Klein 意义下的几何学，这说明不属于 Erlangen 纲领的几何学是存在的．尽管如此，群论的观点，变换群的思想在现代几何与拓扑的研究中还是占有十分重要的地位，群的运用也是随处可见的．

参考文献

[1] 梅向明,刘增贤,林向岩. 高等几何. 北京:高等教育出版社,1983

[2] 梅向明,刘增贤,门树慧. 高等几何. 北京:高等教育出版社,1988

[3] 钟集. 高等几何. 北京:高等教育出版社,1983

[4] 朱德祥. 高等几何. 北京:高等教育出版社,1983

[5] 方德植,陈奕培. 射影几何. 北京:高等教育出版社,1983

[6] 毛澍芬,沈世明. 射影几何. 上海:上海科学技术出版社,1985

[7] Busemann H,Kelly P. 射影几何与射影度量. 周纪安等译. 天津:天津师大出版社,1985

[8] Greenberg M J. Euclidean and Non - Euclidean Geometries. W.H. Freedman and Company, 1980

[9] 项武义,王申怀,潘养廉. 古典几何学讲义. 上海:复旦大学出版社,1986

[10] Yaglom U M. 几何变换 3. 张学诚译. 北京:北京大学出版社,1987

[11] Ayres F Jr. 射影几何的理论与习题. 胡宗慎等译. 上海:上海科学技术出版社,1987

[12] 龙泽斌. 几何变换. 长沙:湖南科学技术出版社,1984

名词与人名索引